Course 02402/02323 Introducerende Statistik

Forelæsning 3: Kontinuerte fordelinger

Per Bruun Brockhoff

DTU Compute, Statistik og Dataanalyse
Bygning 324, Rum 220
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Lyngby – Danmark

e-mail: perbb@dtu.dk

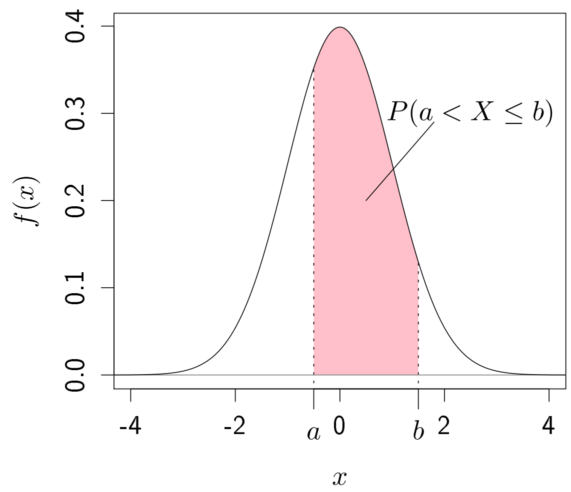
DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Oversigt

Tæthedsfunktion (probability density function (pdf))

- Tæthedsfunktionen for en stokastisk variabel betegnes ved $f(x)$
- $f(x)$ siger noget om hyppigheden af udfaldet x for den stokastiske variabel X
- For kontinuerte variable svarer tætheden ikke til sandsynligheden, dvs. $f(x) \neq P(X = x)$
- Et godt plot af $f(x)$ er et histogram (kontinuert)

Tæthedsfunktion for en kontinuert variabel



Tæthedsfunktion for en kontinuert variabel

For en kontinuert stokastisk variabel skrives tæthedsfunktionen som:

$$f(x)$$

Der gælder:

$$f(x) \geq 0 \quad \text{for alle mulige } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Fordelingsfunktion (distribution function eller cumulative density function (cdf))

- Fordelingsfunktion for en kontinuert stokastisk variabel betegnes ved $F(x)$.
  Fordelingsfunktionen svarer til den kumulerede tæthedsfunktion:

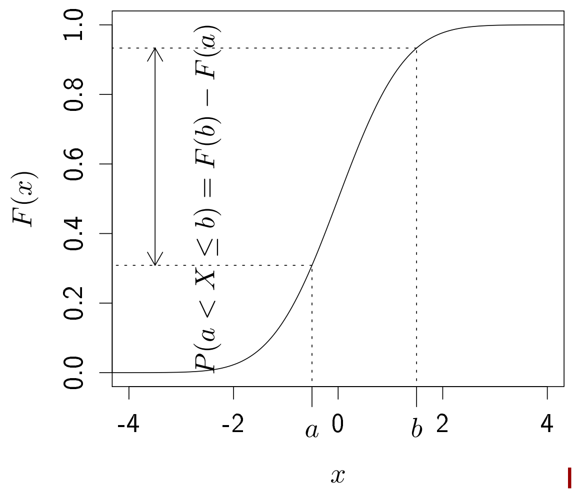
$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

$$f(x) = F^{'}(x)$$

- Et godt plot for fordelingsfunktionen er den kumulative fordeling

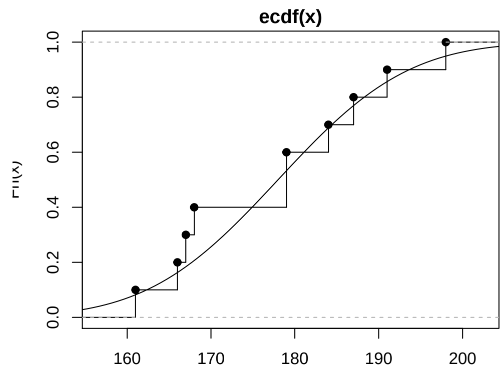
Fordelingsfunktion (distribution function eller cumulative density function (cdf))



Den empiriske cumulative distribution function - ecdf

Student height example from Chapter 1:

```
x <- c(168,161,167,179,184,166,198,187,191,179)
plot(ecdf(x), verticals = TRUE)
xp <- seq(0.9*min(x), 1.1*max(x), length.out = 100)
lines(xp, pnorm(xp, mean(x), sd(x)))
```



Middelværdi (mean) af en kontinuert stokastisk variabel

Middelværdien af en kontinuert stokastisk variabel

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Sammenlign med den diskrete definition:

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$$

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Varians af en kontinuert stokastisk variabel

Variansen af en kontinuert stokastisk variabel:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)dx$$

Sammenlign med den diskrete definition:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Kovariansen af to stokastiske variable

Kovariansen af to stokastiske variable:

Let X and Y be two random variables, then the covariance between X and Y, is

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Konkrete statistiske fordelinger

- Der findes en række statistiske fordelinger, som kan bruges til at beskrive og analysere forskellige problemstillinger med

Vi betragter nu kontinuerte fordelinger

- Uniform fordelingen
- Normal fordelingen
- Log-Normal fordelingen
- Eksponential fordelingen

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Uniform fordelingen

Skrivemåde:

$X \sim U(\alpha, \beta)$

Tæthedsfunktion:

$f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}$

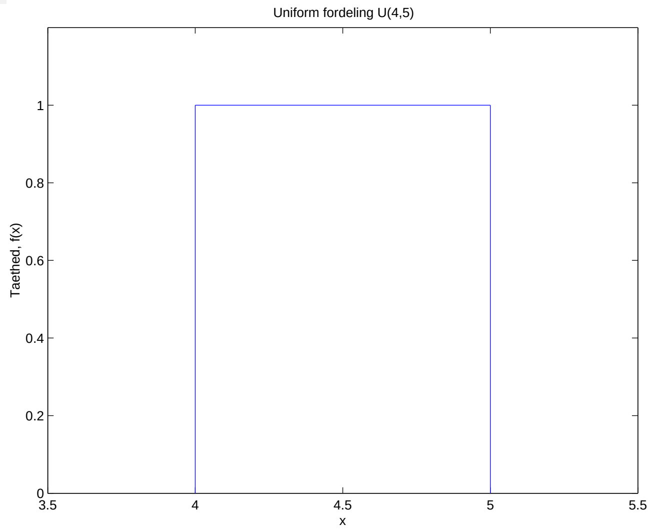
Middelværdi:

$\mu = \frac{\alpha+\beta}{2}$

Varians:

$\sigma^2 = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$

Uniform fordelingen



Eksempel 1

Medarbejdere på en arbejdsplads ankommer mellem klokken 8.00 og 8.30. Det antages, at ankomsttiden kan beskrives ved en uniform fordeling.

Spørgsmål:

Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt medarbejder (Hans) ankommer mellem 8.20 og 8.30?

Svar:

10/30=1/3

```
punif(30,0,30)-punif(20,0,30)
```

[1] 0.33333

Eksempel 1 - forts.

Spørgsmål:

Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt medarbejder (Martin) ankommer efter 8.30?

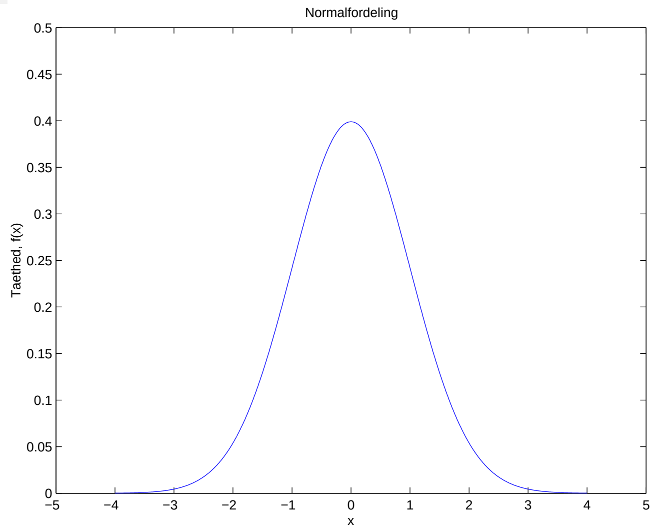
Svar:

0

```
1-punif(30,0,30)
```

[1] 0

Normalfordelingen



DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Normal fordelingen

Skrivemåde:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Tæthedsfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

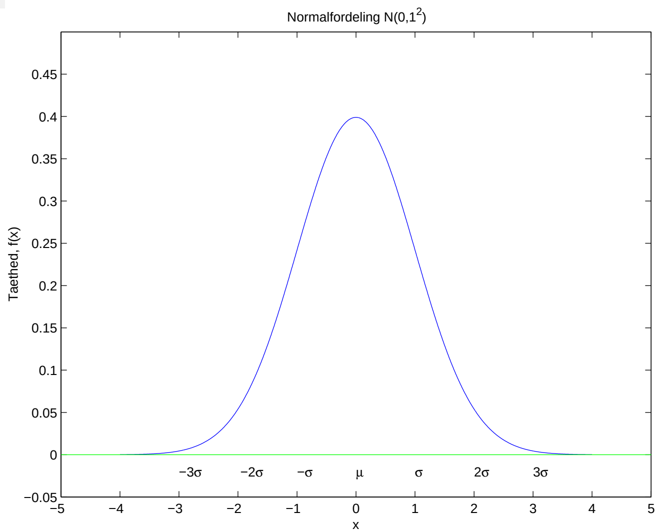
Middelværdi:

$\mu = \mu$

Varians:

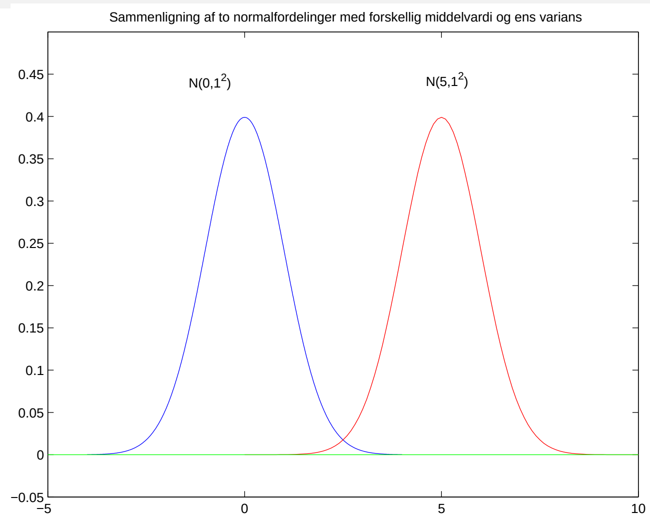
$\sigma^2 = \sigma^2$

Normalfordelingen



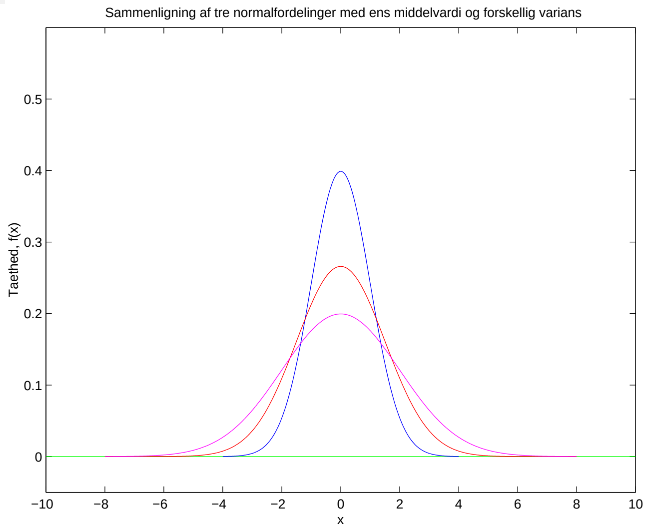
DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Normalfordelingen



DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Normalfordelingen



DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Normal fordelingen

En standard normal fordeling:

$$Z \sim N(0, 1^2)$$

En normalfordeling med middelværdi 0 og varians 1.

Standardisering:

En vilkårlig normal fordelt variabel $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ kan standardiseres ved at beregne

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Eksempel 2

Målefejl:

En vægt har en målefejl, Z, der kan beskrives ved en standard normalfordeling, dvs

$$Z \sim N(0, 1^2)$$

dvs. middelværdi $\mu = 0$ og spredning $\sigma = 1$ gram.
Vi måler nu vægten af ét emne

Spørgsmål a):

Hvad er sandsynligheden for at vægten måler mindst 2 gram for lidt?

Svar:

$P(Z \leq -2) = 0.02275$

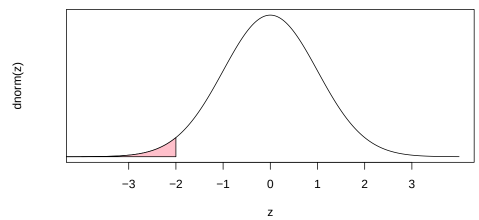
```
pnorm(-2)
```


Eksempel 2

Svar:

```
pnorm(-2)
```

[1] 0.02275



DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Eksempel 2

Spørgsmål b):

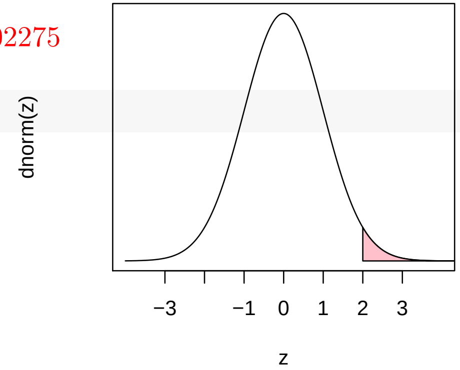
Hvad er sandsynligheden for at vægten måler mindst 2 gram for meget?

Svar:

$P(Z \geq 2) = 0.02275$

```
1-pnorm(2)
```

[1] 0.02275



Eksempel 2

Spørgsmål c):

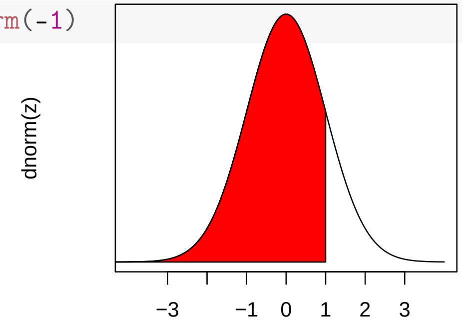
Hvad er sandsynligheden for at vægten måler højst ± 1 gram forkert?

Svar:

$P(|Z| \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = 0.683$

```
pnorm(1)-pnorm(-1)
```

[1] 0.68269



Eksempel 2

Spørgsmål c):

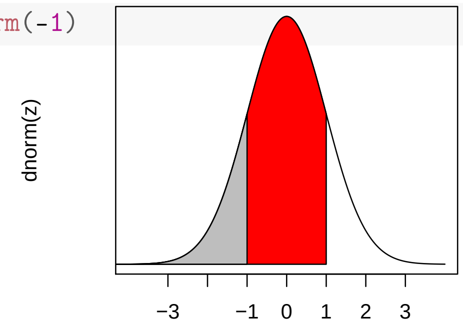
Hvad er sandsynligheden for at vægten måler højst ± 1 gram forkert?

Svar:

$P(|Z| \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = 0.683$

```
pnorm(1)-pnorm(-1)
```

[1] 0.68269



Eksempel 3

Indkomstfordeling:

Det antages, at blandt en gruppe lærere i folkeskolen, at lønnen kan beskrives ved en normalfordeling med middelværdi $\mu = 280.000$ og spredning $\sigma = 10.000$.

Spørgsmål a):

Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt lærer tjener mere end 300.000?

Svar:

$P(X > 300) = P(Z > \frac{300-280}{10}) = P(Z > 2) = 0.023$

$$X \sim N(300, 10^2) \Rightarrow Z = \frac{X - 280}{10} \sim N(0, 1^2)$$

Eksempel 3

Spørgsmål a):

Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt lærer tjener mere end 300.000?

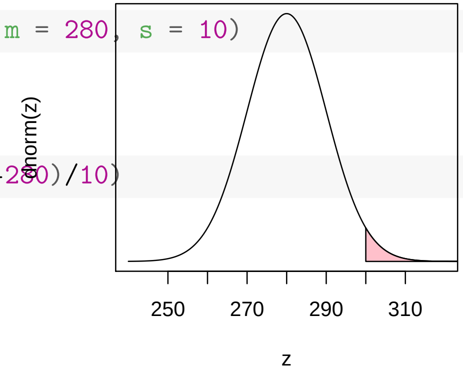
Svar:

```
1-pnorm(300, m = 280, s = 10)
```

[1] 0.02275

```
1-pnorm((300-280)/10)
```

[1] 0.02275



Eksempel 4

En mere smal fordeling:

Det antages, at blandt en gruppe lærere i folkeskolen, at lønnen kan beskrives ved en normalfordeling med middelværdi $\mu = 290.000$ og spredning $\sigma = 4.000$.

Spørgsmål a):

Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt lærer tjener mere end 300.000?

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Eksempel 4

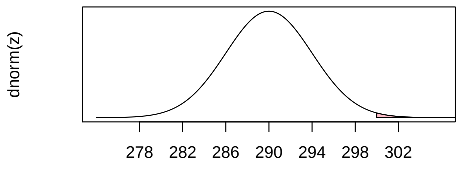
Spørgsmål a):

Hvad er sandsynligheden for at en tilfældig udvalgt lærer tjener mere end 300.000?

Svar:

```
1-pnorm(300, m = 290, s = 4)
```

[1] 0.0062097



Eksempel 5

Samme indkomstfordeling

Det antages, at blandt en gruppe lærere i folkeskolen, at lønnen kan beskrives ved en normalfordeling med middelværdi $\mu = 290.000$ og spredning $\sigma = 4.000$

"Omvendt spørgsmål"

Angiv det interval, der dækker over 95% af læreres løn

Svar:

```
qnorm(c(0.025, 0.975), m = 290, s = 4)
```

[1] 282.16 297.84

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Log-Normal fordelingen

Skrivemåde:

$X \sim LN(\alpha, \beta)$

Tæthedsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} x^{-1} e^{-(\ln(x)-\alpha)^2/2\beta^2} & x > 0,\ \beta > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

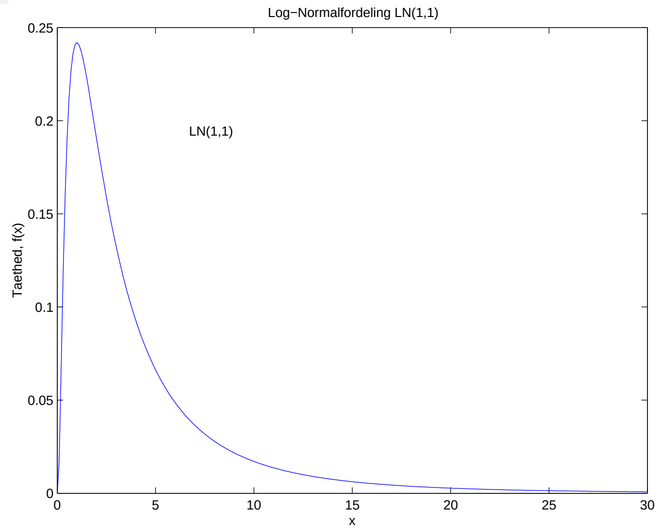
Middelværdi:

$\mu = e^{\alpha+\beta^2/2}$

Varians:

$\sigma^2 = e^{2\alpha+\beta^2}(e^{\beta^2} - 1)$

Log-Normal fordelingen



DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Log-Normal fordelingen

Lognormal og Normalfordelingen:

En log-normal fordelt variabel $Y \sim LN(\alpha, \beta)$, kan transformeres til en standard normal fordelt variabel X ved

$$X = \frac{\ln(Y) - \alpha}{\beta}$$

dvs.

$$X \sim N(0, 1^2)$$

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Kontinuerte fordelinger i R

R	Betegnelse
`norm`	Normalfordelingen
`unif`	Den uniforme fordeling
`lnorm`	Log-normalfordelingen
`exp`	Exponentialfordelingen

- `d` Tæthedsfunktion $f(x)$ (probability density function).
- `p` Fordelingsfunktion $F(x)$ (cumulative distribution function).
- `q` Fraktil (quantile) i fordeling.
- `r` Tilfældige tal fra fordelingen.

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Eksponential fordelingen

Tæthedsfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x > 0, \ \beta > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Eksponentialfordelingen

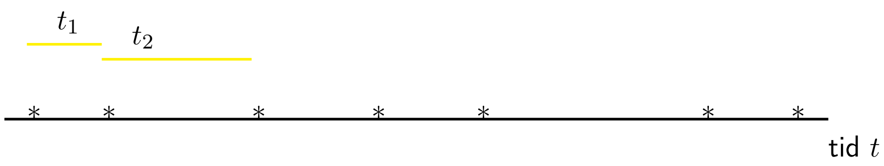
- Eksponential fordelingen er et special tilfælde af Gamma fordelingen
- Eksponential fordelingen anvendes f.eks. til at beskrive levetider og ventetider
- Eksponential fordelingen kan bruges til at beskrive (vente)tiden mellem hændelser i poisson fordelingen
- Middelværdi $\mu = \beta$
- Varians $\sigma^2 = \beta^2$

DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Sammenhæng mellem Eksponential og Poisson fordelingen

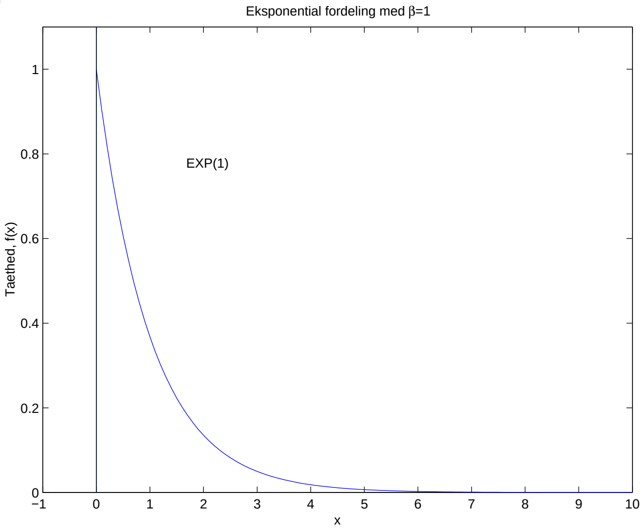
Poisson: Diskrete hændelser pr. enhed

Eksponential: Kontinuert afstand mellem hændelser



DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Eksponential fordelingen



DTU Compute
Institut for Matematik og Computer Science

Eksempel 6

Kø-model - poisson proces

Tiden mellem kundeankomster på et posthus er eksponential fordelt med middelværdi $\mu = 2$ minutter.

Spørgsmål:

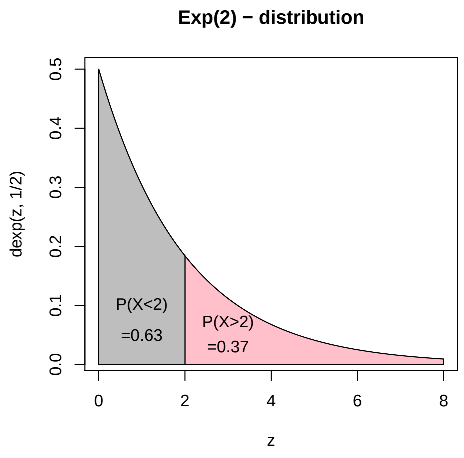
En kunde er netop ankommet. Hvad er sandsynligheden for at der ikke kommer flere kunder indefor en periode på 2 minutter?

Svar:

```
1-pexp(2, rate = 1/2)
```

```
[1] 0.36788
```


Eksempel 6



Eksempel 6

```
z=seq(0,8,by=0.01)

plot(z,dexp(z, 1/2),type = "l", main = "Exp(2) - distribution")

polygon(c(2, seq(2, 8, by = 0.01), 8, 2),
c(0, dexp(seq(2, 8, by = 0.01), 1/2), 0, 0),
col = "pink")

text(3,0.07,"P(X>2)")
text(3,0.03,"=0.37")

polygon(c(2, seq(2, 0, by = -0.01), 0, 2),
c(0, dexp(seq(2, 0, by =- 0.01), 1/2), 0, 0),
col = "grey")

text(1,0.1,"P(X<2)")
text(1,0.05,"=0.63")
```


Eksempel 7

Spørgsmål:

En kunde er netop ankommet. Beregn sandsynligheden for at der ikke kommer flere kunder indefor en periode på 2 minutter vha. Poissonfordelingen

Svar:

$\lambda_{2min} = 1, \; P(X = 0) = \frac{e^{-1}}{1!} 1^0 = e^{-1}$

```
dpois(0,1)
```

```
[1] 0.36788
```

```
exp(-1)
```

```
[1] 0.36788
```

Eksempel 8

Andre tidsperioder:
Tiden mellem kundeankomster på et posthus er eksponential fordelt med middelværdi $\mu = 2$ minutter. Vi betragter nu en periode på 10 minutter

Spørgsmål:
Beregn sandsynligheden for at der ikke kommer nogen kunder i perioden vha. Poissonfordelingen

Svar:
$\lambda_{10min} = 5, \; P(X = 0) = \frac{e^{-5}}{1!} 5^0 = e^{-5}$

```
dpois(0,5)
```

[1] 0.0067379

Regneregler for stokastiske variable

(Gælder BÅDE kontinuert og diskret)

X er en stokastisk variabel
. Vi antager at a og b er konstanter Da gælder:

Middelværdi-regel:

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Varians-regel:

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Eksempel 9

X er en stokastisk variabel
. En stokastisk variabel X har middelværdi 4 og varians 6.

Spørgsmål:
Beregn middelværdi og varians for $Y = -3X + 2$

Svar:

$$\mathrm{E}(Y) = -3\mathrm{E}(X) + 2 = -3 \cdot 4 + 2 = -10$$
$$\mathrm{Var}(Y) = (-3)^2 \mathrm{Var}(X) = 9 \cdot 6 = 54$$

Regneregler for stokastiske variable

$X_1, \ldots, X_n$ er stokastiske variable
Da gælder (når de er uafhængige):

Middelværdi-regel:

$$E(a_1 X_1 + a_2 X_2 + .. + a_n X_n)$$
$$= a_1 E(X_1) + a_2 E(X_2) + .. + a_n E(X_n)$$

Varians-regel:

$$Var(a_1 X_1 + a_2 X_2 + .. + a_n X_n)$$
$$= a_1^2 Var(X_1) + .. + a_n^2 Var(X_n)$$

Eksempel 10

Flypassager-planlægning

Vægten af passagerer på en flystrækning antages normalfordelt $X \sim N(70, 10^2)$.

Et fly, der kan tage 55 passagerer, må max. lastes med 4000 kg (kun passageres vægt betragtes som last).

Spørgsmål:

Beregn sandsynligheden for at flyet bliver overlastet

Hvad er Y=Total passagervægt?

Hvad er Y?

I hvert fald IKKE: $Y = 55 \cdot X$!!!!!!

Eksempel 10

Hvad er Y=Total passagervægt?

$Y = \sum_{i=1}^{55} X_i$, hvor $X_i \sim N(70, 10^2)$

Middelværdi og varians for Y:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{55} E(X_i) = \sum_{i=1}^{55} 70 = 55 \cdot 70 = 3850$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{55} \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{55} 100 = 55 \cdot 100 = 5500$$

Bruger normalfordeling for Y:

```
1-pnorm(4000, m = 3850, s = sqrt(5500))
```

[1] 0.021557

Eksempel 10 - FORKERT ANALYSE

Hvad er Y?

I hvert fald IKKE: $Y = 55 \cdot X$!!!!!!

Middelværdi og varians for Y:

$$E(Y) = 55 \cdot 70 = 3850$$

$$\text{Var}(Y) = 55^2 \text{Var}(X) = 55^2 \cdot 100 = 550^2$$

Bruger normalfordeling for Y:

```
1-pnorm(4000, m = 3850, s = 550)
```

[1] 0.39253

Konsekvens af forkert beregning:

MANGE spildte penge for flyselskabet!!!

Oversigt