Course 02402 Introduction to Statistics

Forelæsning 8: Simpel lineær regression

DTU Compute
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby

Overview

1. Eksempel: Højde-vægt
2. Lineær regressionsmodel
3. Mindste kvadraters metode (least squares)
4. Statistik og lineær regression?
5. Hypotesetests og konfidensintervaller for β_0 og β_1
6. Konfidens- og prædiktionsinterval for regressionslinjen
7. Outputtet fra 'summary(lm(y∼x))'
8. Korrelation
9. Residualanalyse: Modelkontrol

Regression

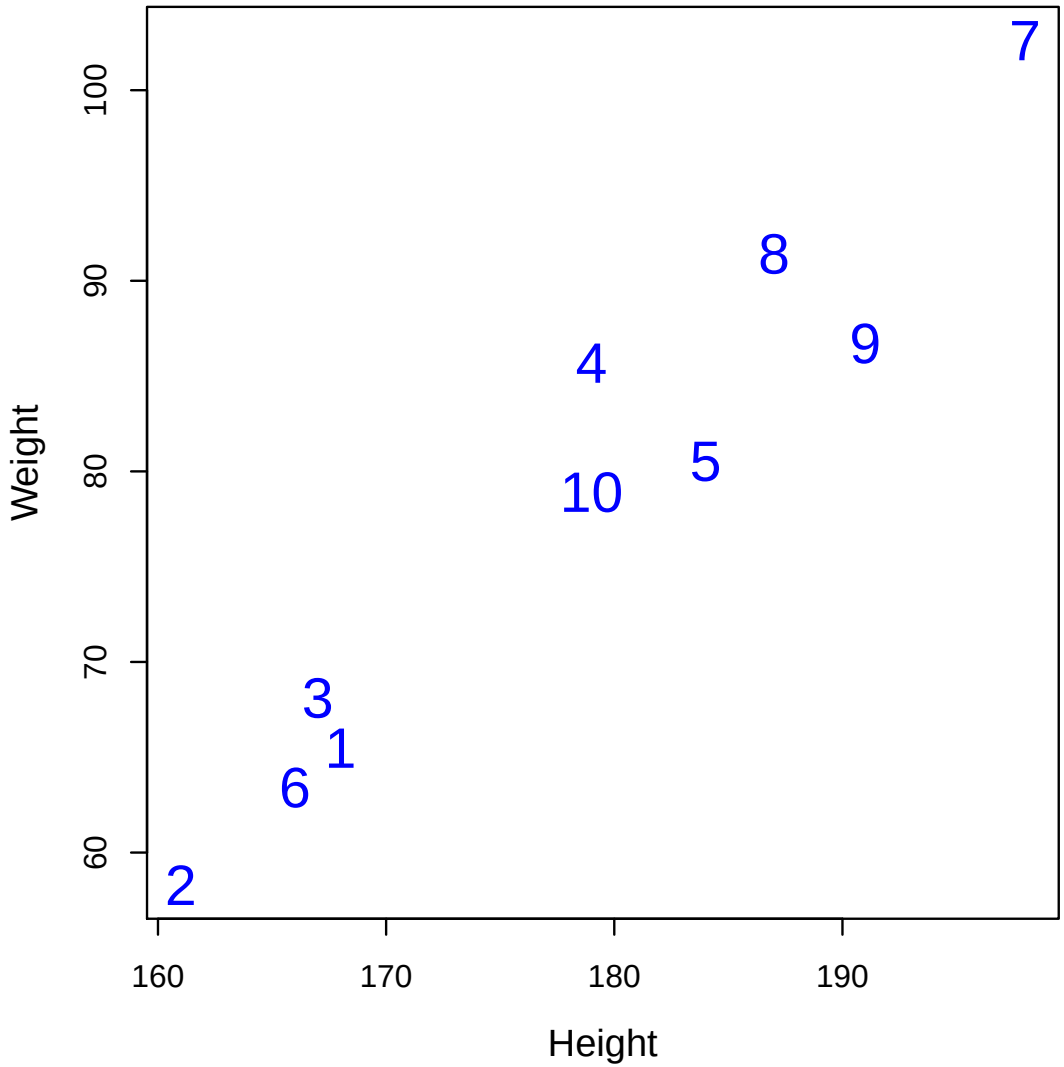
Regression handler om sammenhænge mellem (to) kontinuerte variable
Noget har I allerede lært i gymnasiet, men det er utilstrækkeligt på universitetsniveau.

- Stokastiske variable
- Usikkerheder (herunder konfidensintervaller)
- Hypotesetests
- ...

Overview

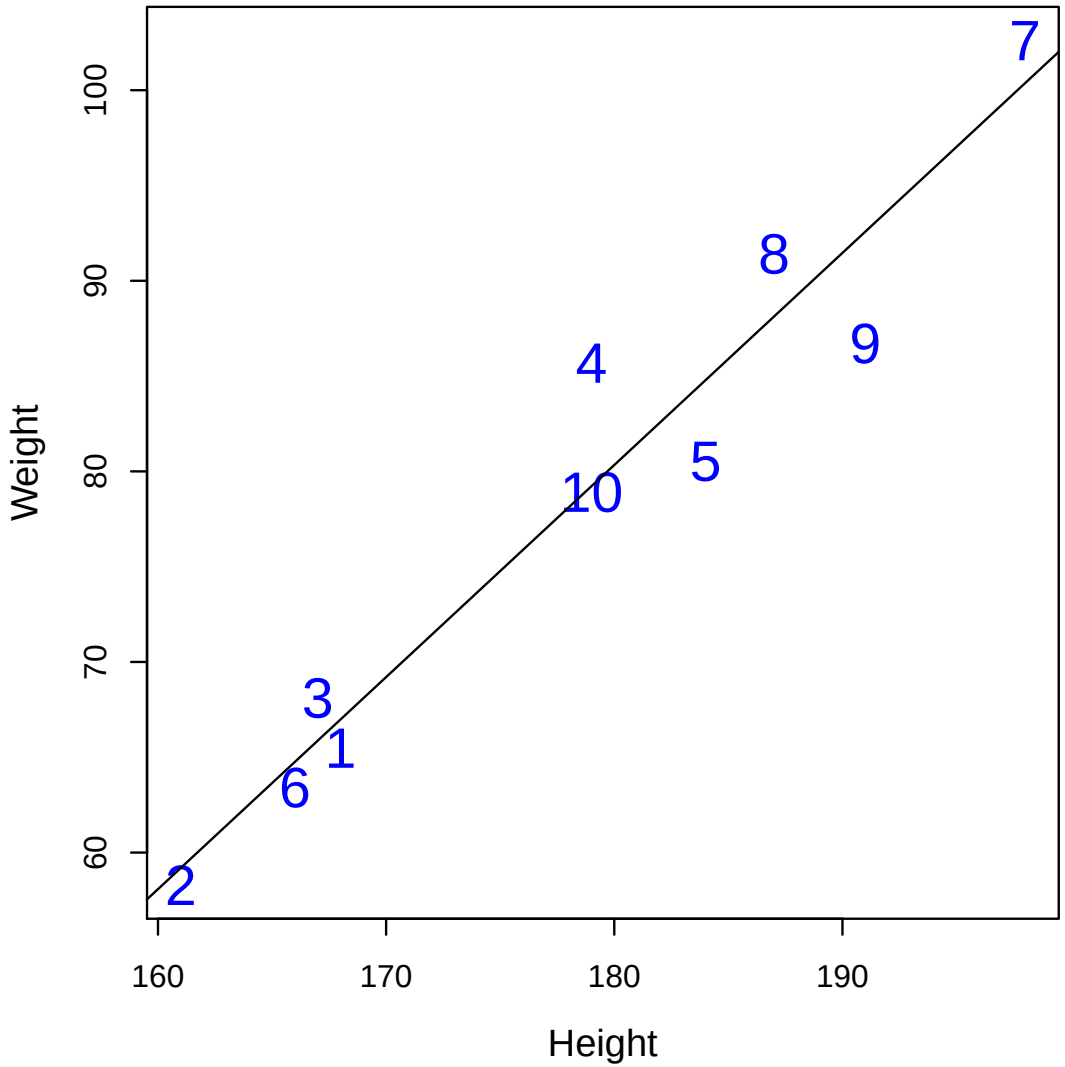
Eksempel: Højde-vægt

Heights (x_i)	168	161	167	179	184	166	198	187	191	179
Weights (y_i)	65.5	58.3	68.1	85.7	80.5	63.4	102.6	91.4	86.7	78.9



Eksempel: Højde-vægt

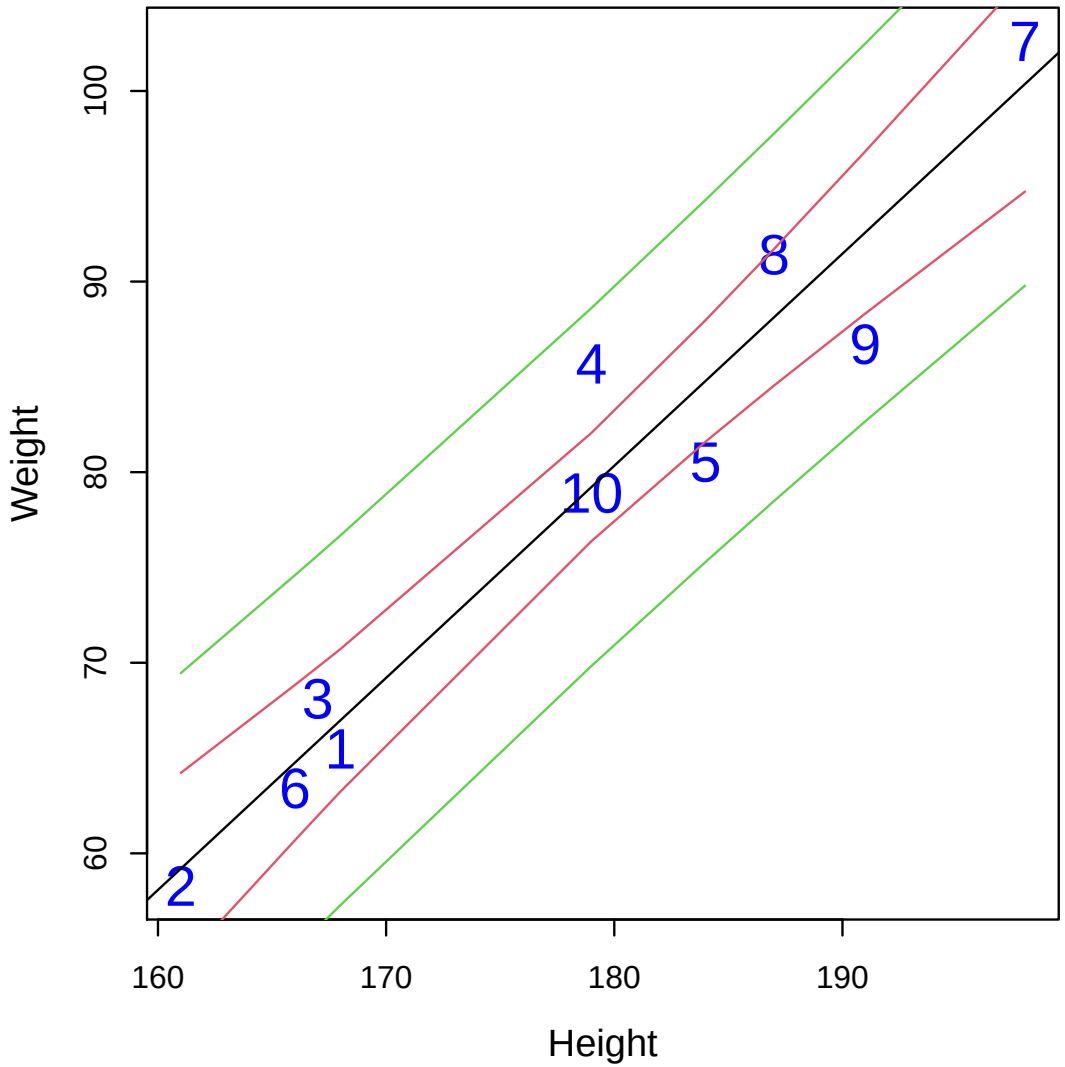
Heights (x_i)	168	161	167	179	184	166	198	187	191	179
Weights (y_i)	65.5	58.3	68.1	85.7	80.5	63.4	102.6	91.4	86.7	78.9



Heights (x_i)	168	161	167	179	184	166	198	187	191	179
Weights (y_i)	65.5	58.3	68.1	85.7	80.5	63.4	102.6	91.4	86.7	78.9

```
summary(lm(y ~ x))

##
## Call:
## lm(formula = y ~ x)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -5.876 -1.451 -0.608  2.234  6.477
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -119.958     18.897   -6.35  0.00022 ***
## x              1.113      0.106   10.50  5.9e-06 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 3.88 on 8 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.932,Adjusted R-squared:  0.924
## F-statistic:  110 on 1 and 8 DF,  p-value: 5.87e-06
```

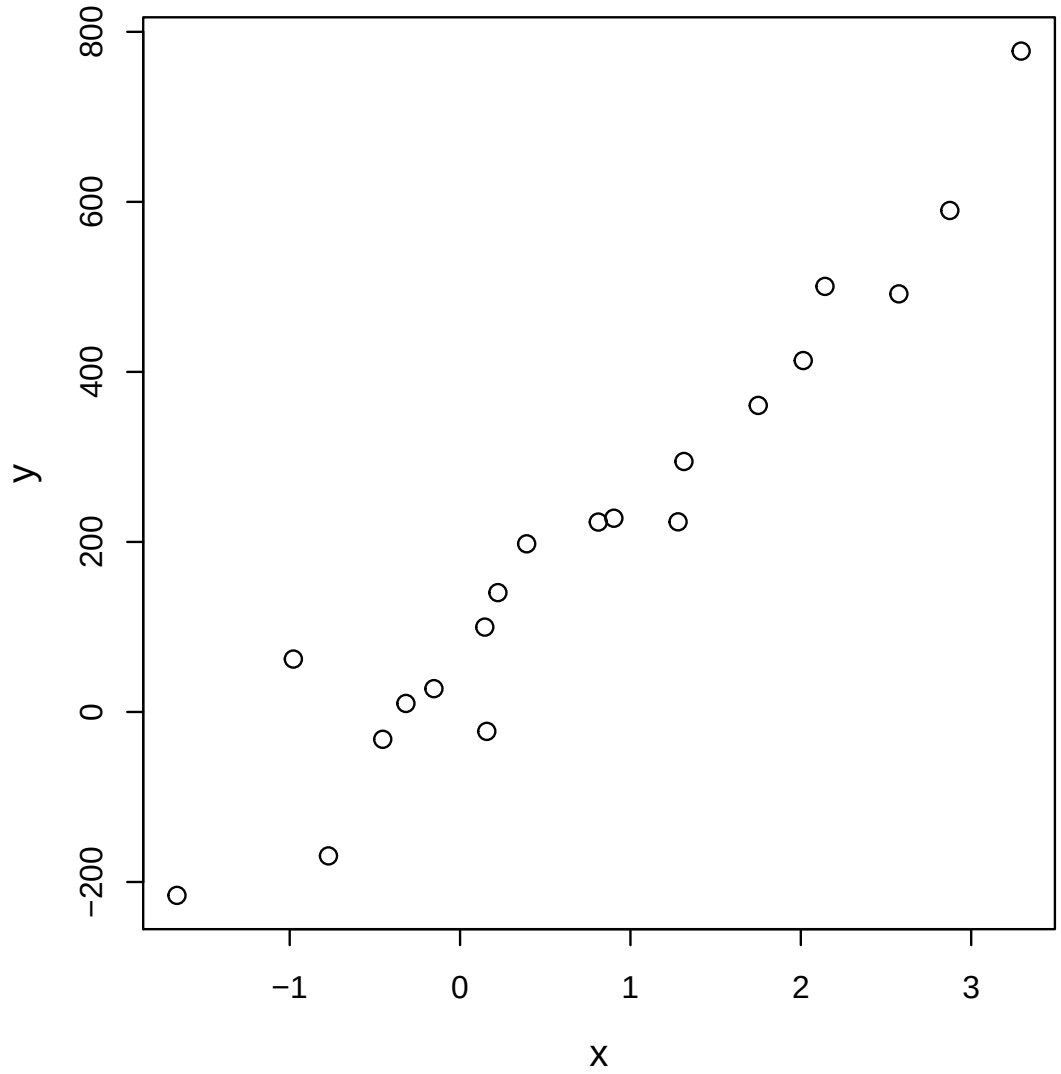
Heights (x_i)	168	161	167	179	184	166	198	187	191	179
Weights (y_i)	65.5	58.3	68.1	85.7	80.5	63.4	102.6	91.4	86.7	78.9



Overview

Et scatterplot af noget data

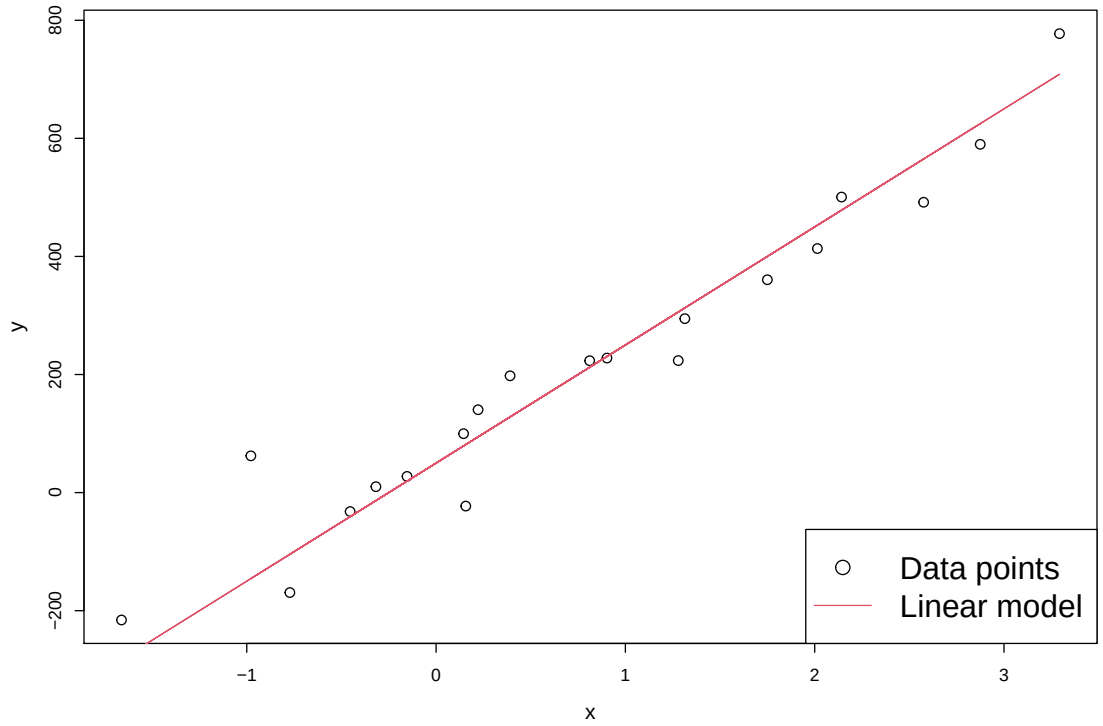
- Vi har n par datapunkter (x_i, y_i).



Opstil en lineær model

- Opstil en lineær model:

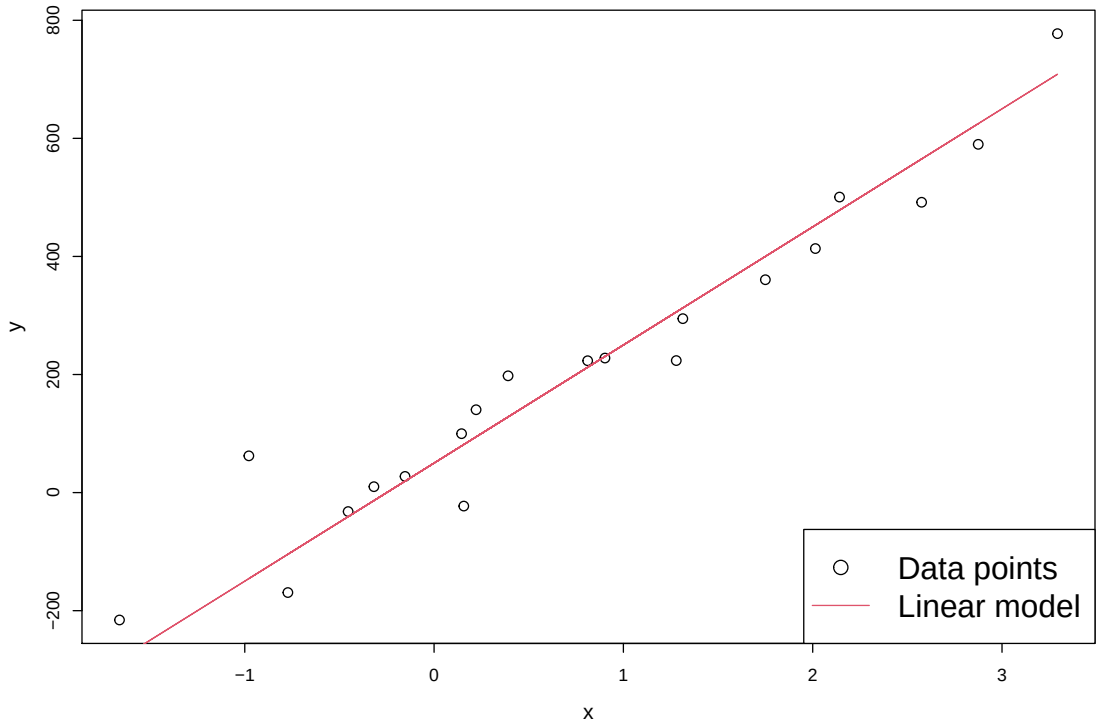
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + ?$$



Opstil en lineær model

- Opstil en lineær model:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + ?$$



- Noget mangler: Beskrivelse af den *tilfældige variation*.

Opstil en lineær regressionsmodel

- Opstil den *lineære regressionsmodel*:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

- Y_i er den *afhængige variabel* (dependent/outcome variable). En stokastisk variabel.
- x_i er en *forklarende variabel*. Deterministiske værdier.
- ε_i er afvigelsen/fejlleddet (error). En stokastisk variabel.
- Vi antager at ε_i, $i = 1, \ldots, n$, er *uafhængige og ensfordelte* (i.i.d.), med $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Opstil en lineær regressionsmodel

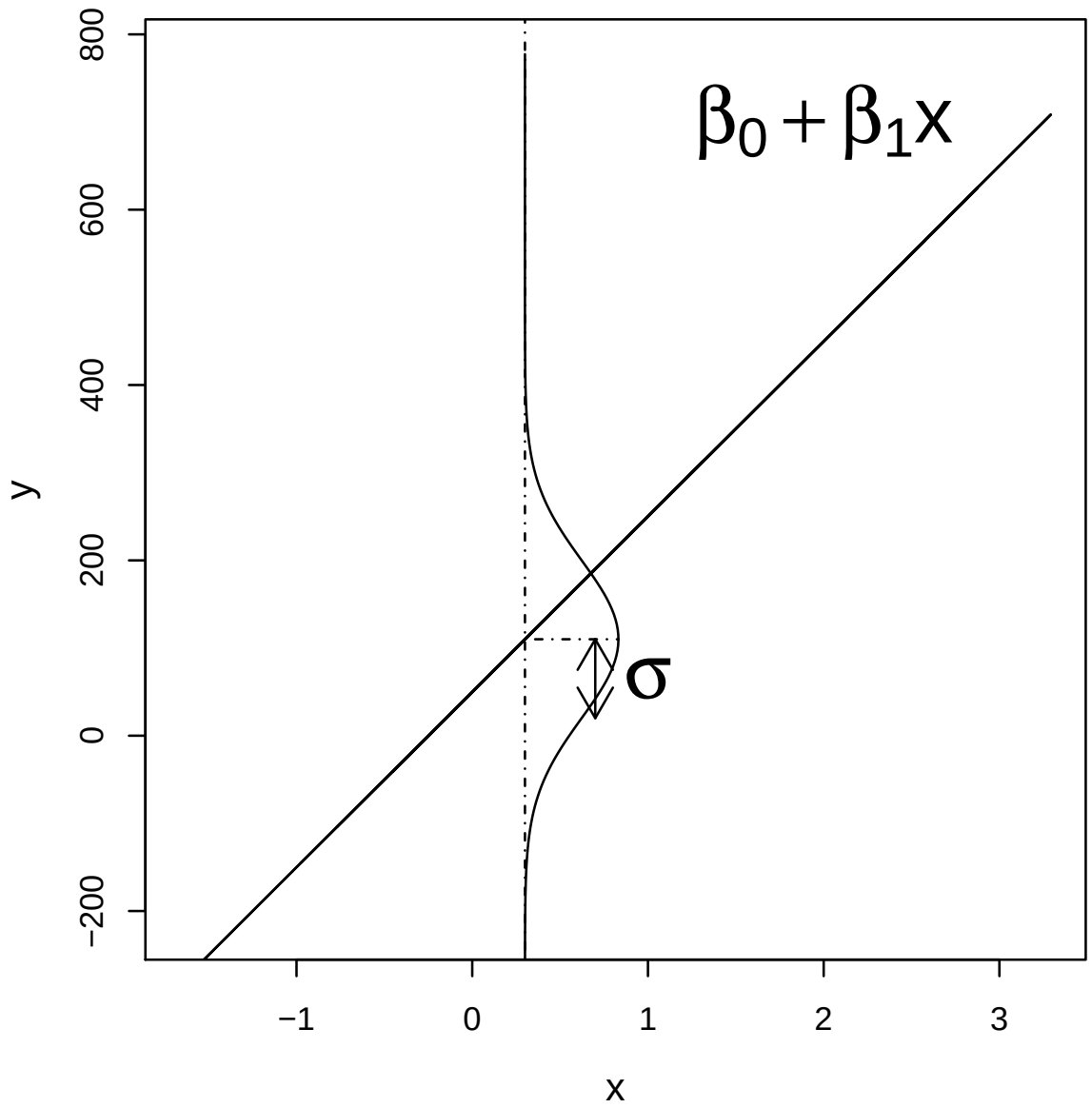
- Opstil den *lineære regressionsmodel*:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

- Y_i er den *afhængige variabel* (dependent/outcome variable). En stokastisk variabel.
- x_i er en *forklarende variabel*. Deterministiske værdier.
- ε_i er afvigelsen/fejlleddet (error). En stokastisk variabel.
- Vi antager at ε_i, $i = 1, \ldots, n$, er *uafhængige og ensfordelte* (i.i.d.), med $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Overvej: *Hvilken slags fordeling følger Y_i? Er Y_i'erne ensfordelte?*

Illustration af statistisk model



Overview

Mindste kvadraters metode

- Hvordan estimerer vi så parametrene β_0 and β_1?

Mindste kvadraters metode

- Hvordan estimerer vi så parametrene β_0 and β_1?
- God ide: Minimér variansen σ^2 af residualerne (afvigelsen).

Mindste kvadraters metode

- Hvordan estimerer vi så parametrene β_0 and β_1?
- God ide: Minimér variansen σ^2 af residualerne (afvigelsen).
- Men hvordan?

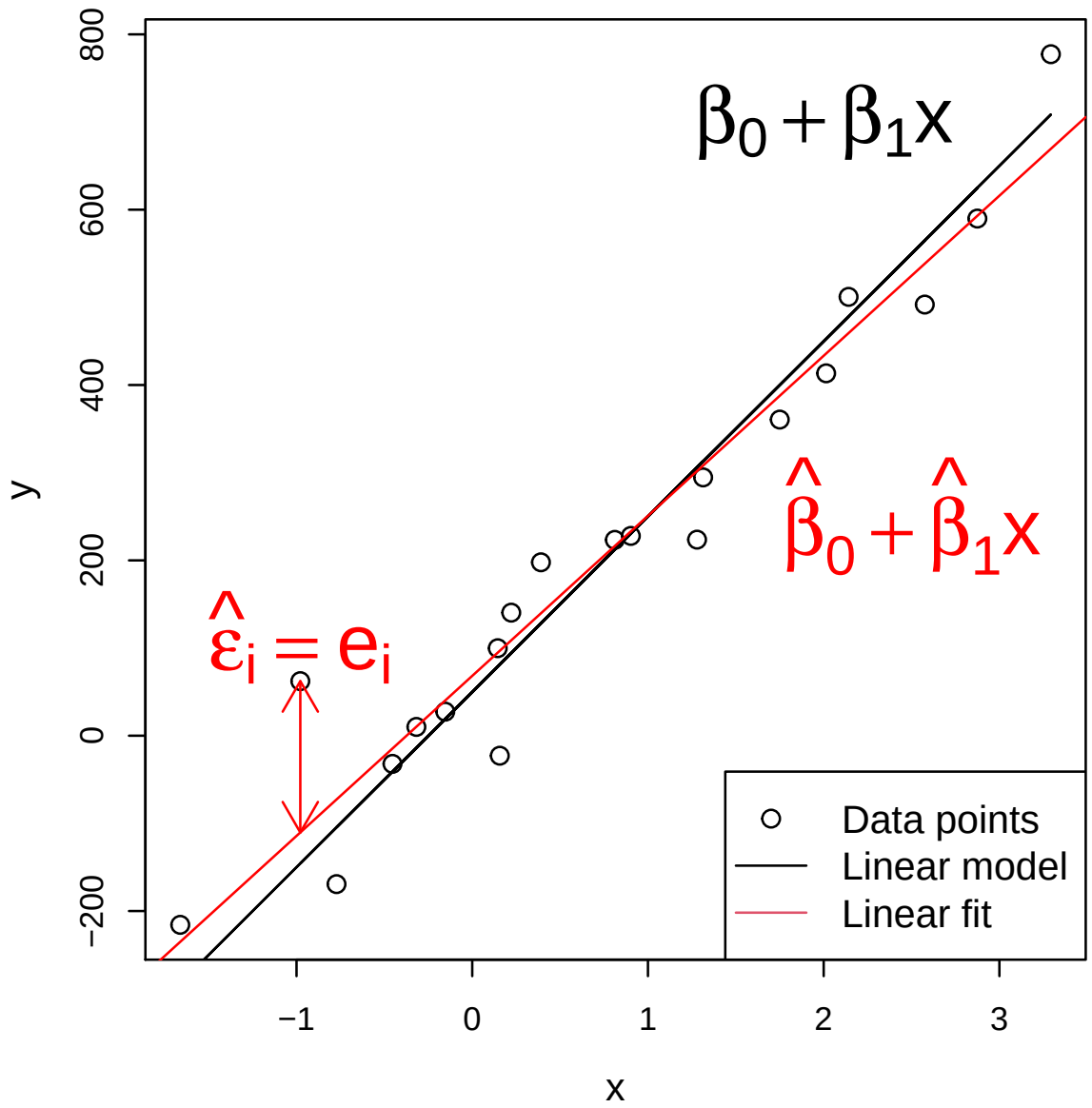
Mindste kvadraters metode

- Hvordan estimerer vi så parametrene β_0 and β_1?
- God ide: Minimér variansen σ^2 af residualerne (afvigelsen).
- Men hvordan?
- Minimér summen af de kvadrerede afvigelser (Residual Sum of Squares, RSS),

$$RSS(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 .$$

$\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ minimerer RSS.

Illustration af model, data og fit



'Least squares'-estimatorer

Theorem 5.4 (her for estimatorer, som i bogen)

'Least squares'-estimatorerne for β_0 og β_1 er givet ved:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x})}{S_{xx}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

hvor $S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

'Least squares'-estimater

Theorem 5.4 (her for *estimater*)

'Least squares'-estimaterne for β_0 og β_1 er givet ved:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{S_{xx}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

hvor $S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Eksempel i R

```r
set.seed(100)

# Generate x
x <- runif(n = 20, min = -2, max = 4)

# Simulate y
beta0 <- 50; beta1 <- 200; sigma <- 90
y <- beta0 + beta1 * x + rnorm(n = length(x), mean = 0, sd = sigma)

# From here: like for the analysis of 'real data', we have data in x and y:

# Scatter plot of y against x
plot(x, y)

# Find the least squares estimates, use Theorem 5.4
(beta1hat <- sum( (y - mean(y))*(x-mean(x)) ) / sum( (x-mean(x))^2 ))
(bet0hat <- mean(y) - beta1hat*mean(x))

# Use lm() to find the estimates
lm(y ~ x)

# Plot the fitted  line
abline(lm(y ~ x), col="red")
```

Overview

Parameterestimaterne er stokastiske variable

Hvad hvis vi udtrækker en ny stikprøve

Vil estimaterne af $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ så blive de samme?

Parameterestimaterne er stokastiske variable

Hvad hvis vi udtrækker en ny stikprøve

Vil estimaterne af $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ så blive de samme?

Nej, de er stokastiske variable!

Tager vi en ny stikprøve så får vi en anden realisation.

Parameterestimaterne er stokastiske variable

Hvad hvis vi udtrækker en ny stikprøve

Vil estimaterne af $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ så blive de samme?

Nej, de er stokastiske variable!

Tager vi en ny stikprøve så får vi en anden realisation.

Hvad er (stikprøve-)fordelingen af parameterestimaterne?

...

... i en lineær regressionsmodel med normalfordelte fejlled?

Parameterestimaterne er stokastiske variable

Hvad hvis vi udtrækker en ny stikprøve

Vil estimaterne af $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ så blive de samme?

Nej, de er stokastiske variable!

Tager vi en ny stikprøve så får vi en anden realisation.

Hvad er (stikprøve-)fordelingen af parameterestimaterne?

...

... i en lineær regressionsmodel med normalfordelte fejlled?

Simulation kan hjælpe os! Lad os se på R...

Fordeling af $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$

- $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ er normalfordelte og variansen er givet ved:

Theorem 5.8 (første del)

$$V[\hat{\beta}_0] = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\bar{x}^2\sigma^2}{S_{xx}}$$

$$V[\hat{\beta}_1] = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

$$Cov[\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1] = -\frac{\bar{x}\sigma^2}{S_{xx}}$$

- Kovariansen $Cov[\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1]$ gør vi ikke mere ud af her.

Estimater af standardafvigelserne på $\hat{\beta}_0$ and $\hat{\beta}_1$

Theorem 5.8 (anden del)

σ^2 erstatter man normalt med dets estimat, $\hat{\sigma}^2$, den *centrale estimator for* σ^2:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}.$$

Når man bruger estimatet af σ^2, så bliver varianserne for β_0 og β_1 også estimater. Vi benævner disse $\hat{\sigma}^2_{\beta_0}$ og $\hat{\sigma}^2_{\beta_1}$.

Estimater af standardafvigelserne på $\hat{\beta}_0$ and $\hat{\beta}_1$

Theorem 5.8 (anden del)

σ^2 erstatter man normalt med dets estimat, $\hat{\sigma}^2$, den *centrale estimator for* σ^2:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2}.$$

Når man bruger estimatet af σ^2, så bliver varianserne for β_0 og β_1 også estimater. Vi benævner disse $\hat{\sigma}^2_{\beta_0}$ og $\hat{\sigma}^2_{\beta_1}$.

Estimater af standardafvigelsen for $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ (formel 5-43 og 5-44):

$$\hat{\sigma}_{\beta_0} = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}}; \quad \hat{\sigma}_{\beta_1} = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

Overview

Hypotesetests for β_0 og β_1

Vi kan udføre hypotesetests for parametrene i en lineær regressionsmodel:

$$H_{0,i}: \quad \beta_i = \beta_{0,i}$$
$$H_{1,i}: \quad \beta_i \neq \beta_{1,i}$$

Hypotesetests for β_0 og β_1

Vi kan udføre hypotesetests for parametrene i en lineær regressionsmodel:

$$\begin{aligned} H_{0,i}: &\quad \beta_i = \beta_{0,i} \\ H_{1,i}: &\quad \beta_i \neq \beta_{1,i} \end{aligned}$$

Theorem 5.12

Under nulhypoteserne ($\beta_0 = \beta_{0,0}$ og $\beta_1 = \beta_{0,1}$) er teststørrelserne

$$T_{\beta_0} = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_{0,0}}{\hat{\sigma}_{\beta_0}}; \quad T_{\beta_1} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{0,1}}{\hat{\sigma}_{\beta_1}},$$

t-fordelt med $n-2$ frihedsgrader.

Hypotetests for β_0 og β_1

- Se Example 5.13 for et eksempel på et hypotesetest.
- Test om parametrene er signifikant forskellige fra 0:

$$H_{0,i} : \beta_i = 0, \quad H_{1,i} : \beta_i \neq 0$$

```
# Read data into R

x <- c(168, 161, 167, 179, 184, 166, 198, 187, 191, 179)
y <- c(65.5, 58.3, 68.1, 85.7, 80.5, 63.4, 102.6, 91.4, 86.7, 78.9)

# Fit model to data
fit <- lm(y ~ x)

# Look at model summary to find Tobs-values and p-values
summary(fit)
```

Konfidensintervaller for β_0 og β_1

Method 5.15

$(1-\alpha)$ konfidensintervaller for β_0 og β_1 er givet ved:

$$\hat{\beta}_0 \pm t_{1-\alpha/2}\,\hat{\sigma}_{\beta_0}$$
$$\hat{\beta}_1 \pm t_{1-\alpha/2}\,\hat{\sigma}_{\beta_1}$$

hvor $t_{1-\alpha/2}$ er$(1-\alpha/2)$-fraktilen i t-fordelingen med $n-2$ frihedsgrader.

- Husk at $\hat{\sigma}_{\beta_0}$ og $\hat{\sigma}_{\beta_1}$ kan findes med ligning 5-43 og 5-44.
- I R kan $\hat{\sigma}_{\beta_0}$ og $\hat{\sigma}_{\beta_1}$ aflæses under "Std. Error" fra `summary(fit)`.

Illustration af konfidensintervaller ved simulation

```
# Number of repetitions (here: CIs)
nRepeat <- 1000

# Empty logical vector of length nRepeat
TrueValInCI <- logical(nRepeat)

# Repeat the simulation and estimation nRepeat times:
for(i in 1:nRepeat){
  # Generate x
  x <- runif(n = 20, min = -2, max = 4)
  # Simulate y
  beta0 = 50; beta1 = 200; sigma = 90
  y <- beta0 + beta1 * x + rnorm(n = length(x), mean = 0, sd = sigma)
  # Use lm() to fit model
  fit <- lm(y ~ x)
  # Use confint() to compute 95% CI for intercept
  ci <- confint(fit, "(Intercept)", level=0.95)
  # Was the 'true' intercept included in the interval? (covered)
  (TrueValInCI[i] <-  ci[1] < beta0  &  beta0 < ci[2])
}

# How often was the true intercept included in the CI?
sum(TrueValInCI) / nRepeat
```

Overview

Method 5.18 Konfidensinterval for $\beta_0 + \beta_1 x_0$

- Konfidensintervallet for $\beta_0 + \beta_1 x_0$ svarer til konfidensintervallet for linjen i punktet x_0.
- $100(1-\alpha)\%$ CI kan findes ved:

$$(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}.$$

Method 5.18 Prædiktionsinterval for $\beta_0 + \beta_1 x_0 + \varepsilon_0$

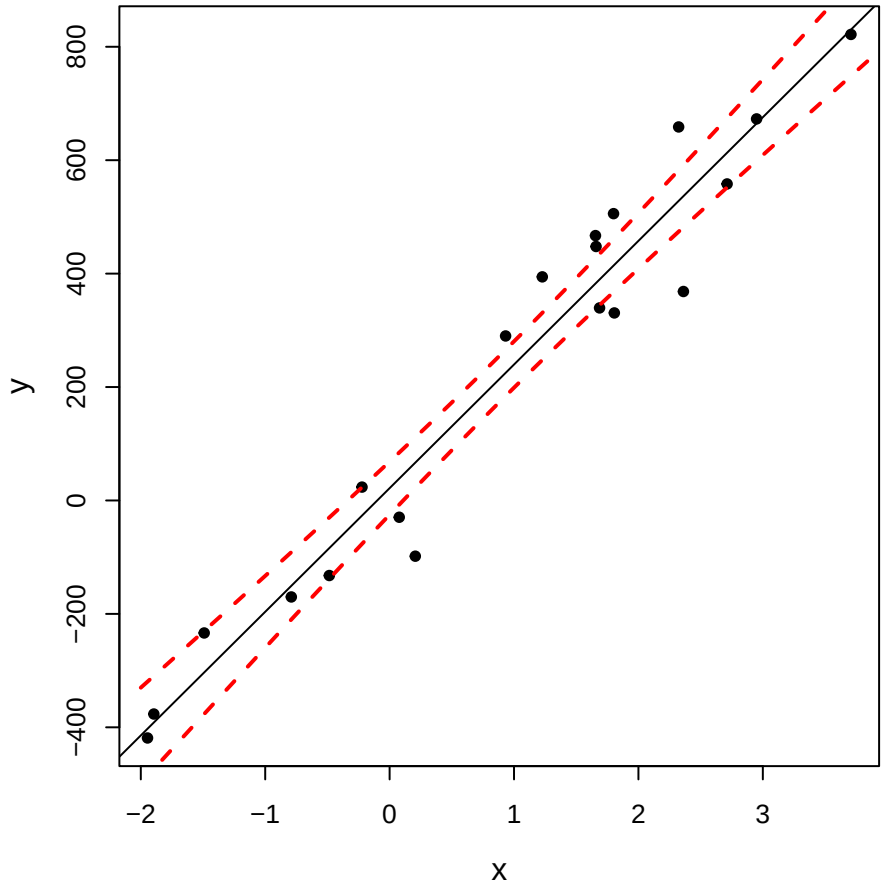
- Prædiktionsintervallet for Y_0 beregnes for med et x_0.
- Dette gøres *før* Y_0 observeres med

$$(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0) \pm t_{\alpha/2} \cdot \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}\,.$$

- Prædiktionsintervallet vil $100(1-\alpha)\%$ af gangene indeholde det observerede y_0.
- For fastholdt α er prædiktionsintervallet større end for konfidensintervallet.

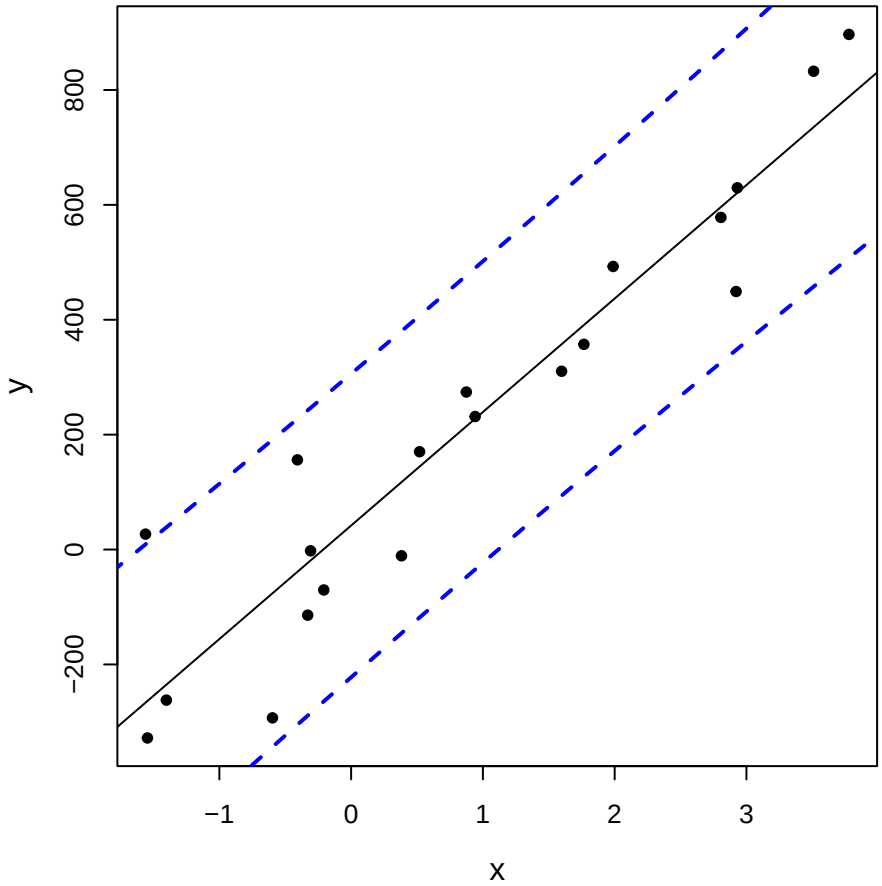
Eksempel med konfidensinterval for linjen

```r
# Generate x
x <- runif(n = 20, min = -2, max = 4)

# Simulate y
beta0 = 50; beta1 = 200; sigma = 90
y <- beta0 + beta1 * x + rnorm(n = length(x), sd = sigma)

# Use lm() to fit model
fit <- lm(y ~ x)

# Make a sequence of 100 x-values
xval <- seq(from = -2, to = 6, length.out = 100)

# Use the  predict function
CI <- predict(fit, newdata = data.frame(x = xval),
              interval = "confidence",
              level = 0.95)

# Check what we got
head(CI)

# Plot the data, model fit and intervals
plot(x, y, pch = 20)
abline(fit)
lines(xval, CI[, "lwr"], lty=2, col = "red", lwd = 2)
lines(xval, CI[, "upr"], lty=2, col = "red", lwd = 2)
```



Eksempel med prædiktionsinterval for linjen

```r
# Generate x
x <- runif(n = 20, min = -2, max = 4)

# Simulate y
beta0 = 50; beta1 = 200; sigma = 90
y <- beta0 + beta1 * x + rnorm(n = length(x), sd = sigma)

# Use lm() to fit model
fit <- lm(y ~ x)

# Make a sequence of 100 x-values
xval <- seq(from = -2, to = 6, length.out = 100)

# Use the  predict function
PI <- predict(fit, newdata = data.frame(x = xval),
              interval = "prediction",
              level = 0.95)

# Check what we got
head(CI)

# Plot the data, model fit and intervals
plot(x, y, pch = 20)
abline(fit)
lines(xval, PI[, "lwr"], lty = 2, col = "blue", lwd = 2)
lines(xval, PI[, "upr"], lty = 2, col = "blue", lwd = 2)
```



Konfidens- og prædiktionsinterval

- Konfidentintervallet angiver usikkerheden på *regressionslinjen*.
- Prædiktionsintervallet angiver usikkerheden for en *ny observation*.
- Prædiktionsintervallet kan aldrig blive mindre end den tilfældige variation i data (altså den fra fejlleddet ε)

Overview

Hvad (ellers) får vi ud af summary() i R?

```
summary(fit)

##
## Call:
## lm(formula = y ~ x)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -216.86  -66.09   -7.16   58.48  293.37
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)     41.8       30.9    1.35     0.19
## x              197.6       16.4   12.05  4.7e-10 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 122 on 18 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.89,Adjusted R-squared:  0.884
## F-statistic:  145 on 1 and 18 DF,  p-value: 4.73e-10
```

summary(lm(y∼x))

- `Residuals:  Min  1Q  Median  3Q  Max`

summary(lm(y∼x))

- `Residuals: Min 1Q Median 3Q Max`
  Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum

summary(lm(y∼x))

- `Residuals: Min 1Q Median 3Q Max`
  Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum
- `Coefficients:`

```
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stars"
```

summary(lm(y∼x))

- `Residuals: Min 1Q Median 3Q Max`
  Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum
- `Coefficients:`

  `Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stars"`

  Koefficienternes:

  $\hat{\beta}_i$ $\hat{\sigma}_{\beta_i}$ t_{obs} p-værdi
  - Testet er $H_{0,i} : \beta_i = 0$ vs. $H_{1,i} : \beta_i \neq 0$
  - Stjernerne er sat efter p-værdien

summary(lm(y∼x))

- `Residuals: Min 1Q Median 3Q Max`
  Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum
- `Coefficients:`

  `Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stars"`

  Koefficienternes:

  $\hat{\beta}_i$ $\hat{\sigma}_{\beta_i}$ t_{obs} p-værdi
  - Testet er $H_{0,i} : \beta_i = 0$ vs. $H_{1,i} : \beta_i \neq 0$
  - Stjernerne er sat efter p-værdien
- `Residual standard error: XXX on XXX degrees of freedom`

summary(lm(y∼x))

- `Residuals: Min 1Q Median 3Q Max`
  Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum
- `Coefficients:`
  `Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stars"`
  Koefficienternes:
  $\hat{\beta}_i$ $\hat{\sigma}_{\beta_i}$ t_{obs} p-værdi
  - Testet er $H_{0,i} : \beta_i = 0$ vs. $H_{1,i} : \beta_i \neq 0$
  - Stjernerne er sat efter p-værdien
- `Residual standard error: XXX on XXX degrees of freedom`
  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$: outputtet viser $\hat{\sigma}$ og antallet af frihedsgrader ν til hypotesetests, CIs, PIs

summary(lm(y∼x))

- `Residuals: Min 1Q Median 3Q Max`
  Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum
- `Coefficients:`
  `Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stars"`
  Koefficienternes:
  $\hat{\beta}_i$ $\hat{\sigma}_{\beta_i}$ t_{obs} p-værdi
  - Testet er $H_{0,i} : \beta_i = 0$ vs. $H_{1,i} : \beta_i \neq 0$
  - Stjernerne er sat efter p-værdien
- `Residual standard error: XXX on XXX degrees of freedom`
  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$: outputtet viser $\hat{\sigma}$ og antallet af frihedsgrader ν til hypotesetests, CIs, PIs
- `Multiple R-squared: XXX`

summary(lm(y∼x))

- `Residuals: Min 1Q Median 3Q Max`
  Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum
- `Coefficients:`
  `Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stars"`
  Koefficienternes:
  $\hat{\beta}_i$ $\hat{\sigma}_{\beta_i}$ t_{obs} p-værdi
  - Testet er $H_{0,i} : \beta_i = 0$ vs. $H_{1,i} : \beta_i \neq 0$
  - Stjernerne er sat efter p-værdien
- `Residual standard error: XXX on XXX degrees of freedom`
  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$: outputtet viser $\hat{\sigma}$ og antallet af frihedsgrader ν til hypotesetests, CIs, PIs
- `Multiple R-squared: XXX`
  Forklaret varians r^2.

summary(lm(y∼x))

- `Residuals: Min 1Q Median 3Q Max`
  Residualernes: Minimum, 1. kvartil, Median, 3. kvartil, Maximum
- `Coefficients:`
  `Estimate Std. Error t value Pr(>|t|) "stars"`
  Koefficienternes:
  $\hat{\beta}_i$ $\hat{\sigma}_{\beta_i}$ t_{obs} p-værdi
  - Testet er $H_{0,i} : \beta_i = 0$ vs. $H_{1,i} : \beta_i \neq 0$
  - Stjernerne er sat efter p-værdien
- `Residual standard error: XXX on XXX degrees of freedom`
  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$: outputtet viser $\hat{\sigma}$ og antallet af frihedsgrader ν til hypotesetests, CIs, PIs
- `Multiple R-squared: XXX`
  Forklaret varians r^2.
- Resten bruger vi ikke i dette kursus.

Overview

Forklaret varians og korrelation

- Den forklarede varians i en model er r^2, i summariet "Multiple R-squared".
- Beregnes med

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2},$$

  hvor $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$.

- Andelen af den totale varians der er forklaret med modellen

Forklaret varians og korrelation

- Korrelationen ρ er et mål for *lineær sammenhæng* mellem to stokastiske variable.
- Den estimerede (i.e. empiriske) korrelation opfylder

$$\hat{\rho} = r = \sqrt{r^2}\, sgn(\hat{\beta}_1)$$

hvor $sgn(\hat{\beta}_1)$ er: -1 for $\hat{\beta}_1 \leq 0$ og 1 for $\hat{\beta}_1 > 0$

Forklaret varians og korrelation

- Korrelationen ρ er et mål for *lineær sammenhæng* mellem to stokastiske variable.
- Den estimerede (i.e. empiriske) korrelation opfylder

$$\hat{\rho} = r = \sqrt{r^2}\, sgn(\hat{\beta}_1)$$

  hvor $sgn(\hat{\beta}_1)$ er: -1 for $\hat{\beta}_1 \leq 0$ og 1 for $\hat{\beta}_1 > 0$
- Altså:
  - Positiv korrelation ved positiv hældning.
  - Negativ korrelation ved negativ hældning.

Test for signifikant korrelation

- Test for signifikant korrelation (lineær sammenhæng) mellem to variable:

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

er ækvivalent med

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

hvor $\hat{\beta}_1$ er estimatet af hældningen i simpel lineær regressionsmodel.

Eksempel: Korrelation og R^2 for højde-vægt data

```r
# Read data into R

x <- c(168, 161, 167, 179, 184, 166, 198, 187, 191, 179)
y <- c(65.5, 58.3, 68.1, 85.7, 80.5, 63.4, 102.6, 91.4, 86.7, 78.9)

# Fit model to data
fit <- lm(y ~ x)

# Scatter plot of data with fitted line
plot(x,y, xlab = "Height", ylab = "Weight")
abline(fit, col="red")

# See summary
summary(fit)

# Correlation between  x and y
cor(x,y)

# Squared correlation is the "Multiple R-squared" from summary(fit)
cor(x,y)^2
```

Overview

Residualanalyse

Method 5.28

- Undersøg normalitetsantagelse for residualerne med et qq-plot.
- Undersøg evt. systematiske afvigelser ved at plotte residualer, e_i, som en funktion af de fittede værdier $\hat{y}_i$.

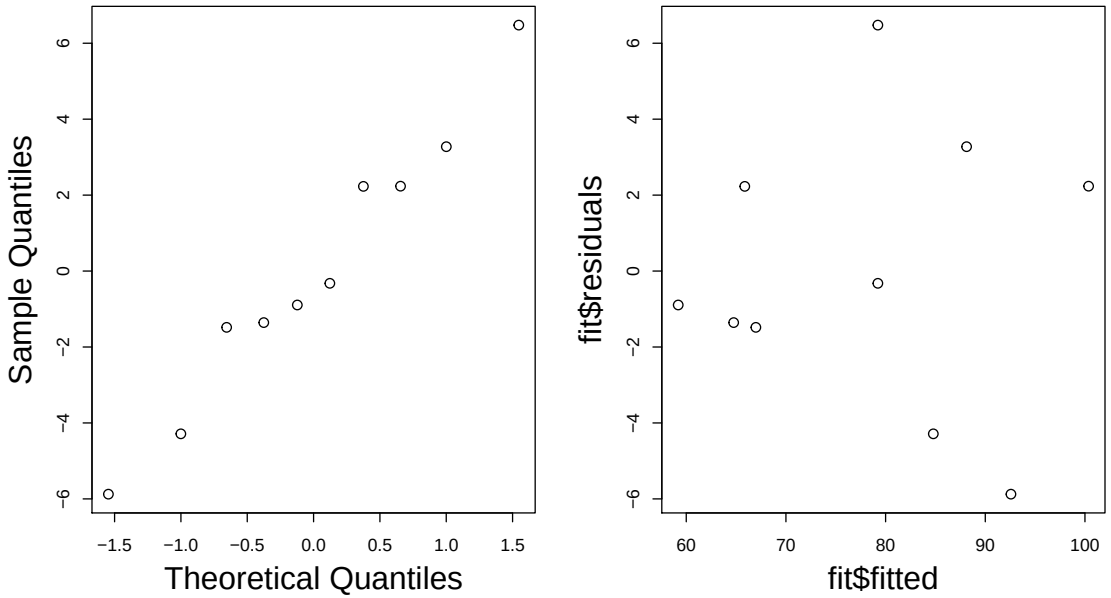
Bemærk!! Det er *residualerne*, IKKE y-værdierne, som indgår i modelkontrol.

(Method 5.29)

- Er uafhængighedsantagelsen rimelig?

Residualanalyse i R

```
x <- c(168, 161, 167, 179, 184, 166, 198, 187, 191, 179)
y <- c(65.5, 58.3, 68.1, 85.7, 80.5, 63.4, 102.6, 91.4, 86.7, 78.9)
fit <- lm(y ~ x)

par(mfrow = c(1, 2))
qqnorm(fit$residuals, main = "", cex.lab = 1.5)
plot(fit$fitted, fit$residuals, cex.lab = 1.5)
```



Overview

1. Eksempel: Højde-vægt
2. Lineær regressionsmodel
3. Mindste kvadraters metode (least squares)
4. Statistik og lineær regression?
5. Hypotesetests og konfidensintervaller for β_0 og β_1
6. Konfidens- og prædiktionsinterval for regressionslinjen
7. Outputtet fra 'summary(lm(y∼x))'
8. Korrelation
9. Residualanalyse: Modelkontrol