

02402 Statistik (Polyteknisk grundlag)

Uge 2: Stokastiske variable og diskrete fordelinger

Nicolai Siim Larsen
DTU Compute
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby

Dagsorden

- 1 Opsummering: Uge 1
- 2 Stokastiske variable og tæthedsfunktioner
- 3 Fordelingsfunktioner
- 4 Konkrete (diskrete) fordelinger I: Binomialfordelingen
 - Eksempel 1
- 5 Konkrete fordelinger II: Hypergeometrisk fordeling
 - Eksempel 2
- 6 Konkrete fordelinger III: Poissonfordelingen
 - Eksempel 3
- 7 Fordelinger i R
- 8 Middelværdi og varians (diskrete fordelinger)

Dagsorden

- 1 Opsummering: Uge 1
- 2 Stokastiske variable og tæthedsfunktioner
- 3 Fordelingsfunktioner
- 4 Konkrete (diskrete) fordelinger I: Binomialfordelingen
 - Eksempel 1
- 5 Konkrete fordelinger II: Hypergeometrisk fordeling
 - Eksempel 2
- 6 Konkrete fordelinger III: Poissonfordelingen
 - Eksempel 3
- 7 Fordelinger i \mathbb{R}
- 8 Middelværdi og varians (diskrete fordelinger)

Opsummering: Uge 1

Vi ønsker at undersøge en population.

Populationen kan beskrives ved bl.a. positions mål og sprednings mål. Hvis populationen består af N individer, kan populationsgennemsnittet og -variansen beregnes ved

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2.$$

Opsummering: Uge 1

Hvis vi har en repræsentativ stikprøve med n observationer, og vi ønsker at estimere populationsparametrene (lave statistisk inferens), kan man udregne stikprøvegennemsnittet og -variansen ved

$$\bar{x} = \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$
$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Vi bemærker, at der divideres med $n - 1$ i beregningen af stikprøvevariansen, da vi benytter det estimerede gennemsnit $\hat{\mu}$ i stedet for μ . Hvis μ kendes, kan denne anvendes i formlen, og man dividerer med n .

Stikprøvevariansen er blot estimeret for populationsvariansen. Det er ikke variansen i stikprøven!

Dagsorden

- 1 Opsummering: Uge 1
- 2 **Stokastiske variable og tæthedsfunktioner**
- 3 Fordelingsfunktioner
- 4 Konkrete (diskrete) fordelinger I: Binomialfordelingen
 - Eksempel 1
- 5 Konkrete fordelinger II: Hypergeometrisk fordeling
 - Eksempel 2
- 6 Konkrete fordelinger III: Poissonfordelingen
 - Eksempel 3
- 7 Fordelinger i \mathbb{R}
- 8 Middelværdi og varians (diskrete fordelinger)

Eksperimenter og stokastiske variable (random variables)

Setup: Et eksperiment.

Udfaldsrummet S er mængden af alle eksperimentets mulige udfald.

En stokastisk variabel X er en afbildning/funktion

$$X : S \rightarrow \mathbb{R}.$$

En stokastisk variabel repræsenterer værdien af udfaldet *før* det tilhørende *eksperiment* finder sted.

Eksempler

Nogle eksempler på stokastiske variable:

- Forelæsningsens varighed
- Antallet af seksere i ti terningkast
- Andelen af stemmer til Det Republikanske Parti ved næste præsidentvalg
- En patients blodsukkerniveau
- Årsresultatet i Novo Nordisk
- Antal placeringer DTU er steget på QS University Ranking siden sidste år
- Ventetiden til Danmark vinder VM i fodbold

Hvilke egenskaber karakteriserer stokastiske variable?

Diskret eller kontinuert stokastisk variabel

Vi skelner mellem *diskrete* og *kontinuerte* stokastiske variable.

- Diskret: Værdimængden er tællelig
 - Antal personer, der bruger briller i lokalet
 - Antal passagerer, der letter fra Københavns Lufthavn inden for en time
- Kontinuert: Værdimængden er utællelig
 - Vindmåling
 - Transporttid til DTU
- I dag behandler vi diskrete variable, medens næste uges pensum omhandler kontinuerte variable.

Stokastisk variabel

Før eksperimentet udføres har vi en stokastisk variabel

$$X \text{ (eller } X_1, \dots, X_n)$$

noteret med store bogstaver.

Stokastisk variabel

Før eksperimentet udføres har vi en stokastisk variabel

$$X \text{ (eller } X_1, \dots, X_n)$$

noteret med store bogstaver.

Så udføres eksperimentet, og vi har et udfald. Udfaldet giver anledning til en observation (observeret værdi)

$$x \text{ (eller } x_1, \dots, x_n)$$

noteret med små bogstaver.

Simulation: Kast en terning i R

```
# One random draw from (1,2,3,4,5,6)  
# with equal probability for each outcome  
sample(1:6, size = 1)
```

```
[1] 1
```

Fordelinger (Distributions)

- Stokastiske variable beskriver udfaldet af et eksperiment før det udføres.
- Hvordan kan vi regne på eksperimentet før det er udført?

Fordelinger (Distributions)

- Stokastiske variable beskriver udfaldet af et eksperiment før det udføres.
- Hvordan kan vi regne på eksperimentet før det er udført?
- Løsning: *Fordelinger* (Distributions).

En univariat fordeling beskriver, hvordan sandsynlighedsmassen fordeles over de reelle tal.

Klassificering af fordelinger

Man kan klassificere en fordeling på flere måder:

- Fordelingsfunktionen
- Tæthedsfunktionen
- Laplacetransformationen
- Den momentgenererende funktion
- Den karakteristiske funktion

I dette kursus benytter vi kun de to første!

Tæthedsfunktion, diskret stokastisk variabel, Definition 2.6

Tæthedsfunktionen (density function / probability density function, forkortelse: pdf) for en diskret stokastisk variabel:

Definition

$$f(x) = P(X = x)$$

Sandsynligheden for at X antager værdien x , når eksperimentet udføres.

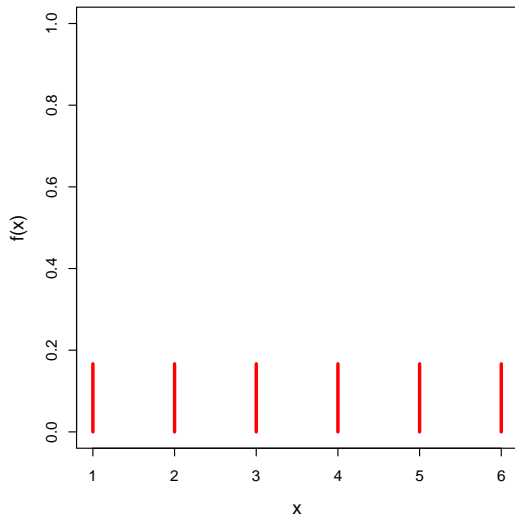
Tæthedsfunktion, diskret stokastisk variabel, Definition 2.6

Tæthedsfunktionen for en diskret stokastisk variabel opfylder følgende to betingelser:

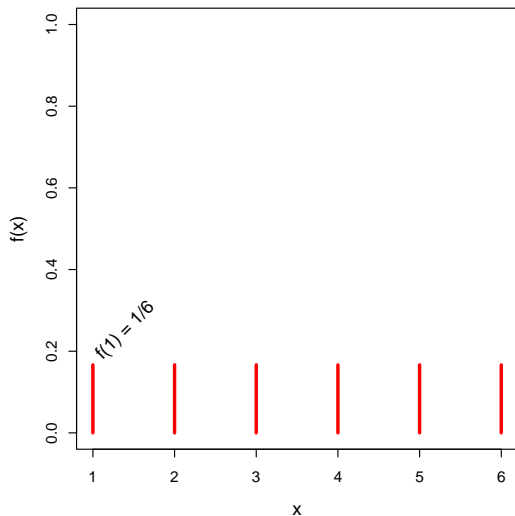
Definition

$$f(x) \geq 0 \text{ for alle } x \quad \text{og} \quad \sum_{\text{alle } x} f(x) = 1$$

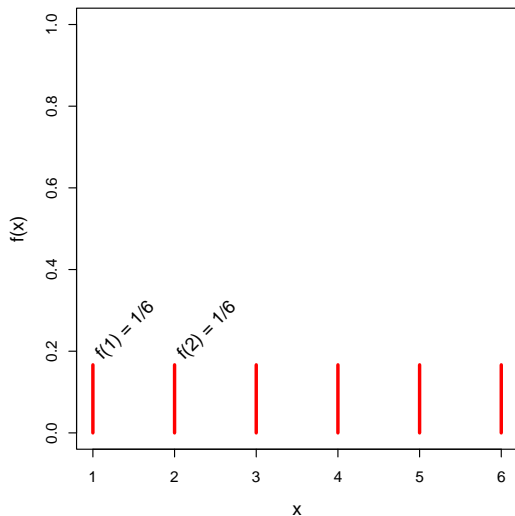
Eksempel: Tæthedsfunktion - Kast med en fair terning



Eksempel: Tæthedsfunktion - Kast med en fair terning



Eksempel: Tæthedsfunktion - Kast med en fair terning



Stikprøve

Hvad nu hvis vi kun har én observation. Kan vi da se fordelingen?

Stikprøve

Hvad nu hvis vi kun har én observation. Kan vi da se fordelingen? **Nej!**

Men hvis vi har n observationer, så har vi en *stikprøve* (sample)

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

og da kan vi begynde at 'se' fordelingen.

Eksempel: Simulér n kast med en fair terning

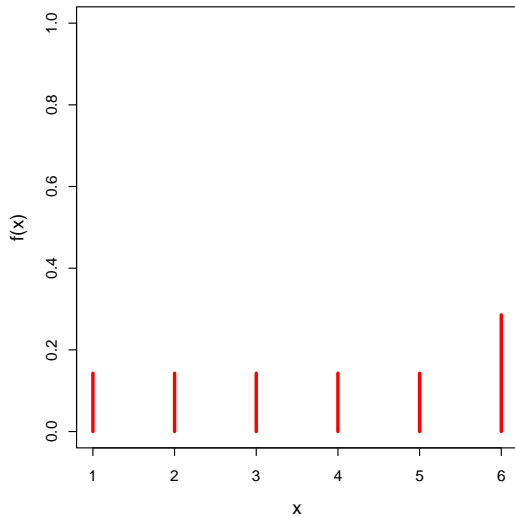
```
# Number of simulated realizations (sample size)
n <- 30

# n independent random draws from the set (1,2,3,4,5,6)
# with equal probability of each outcome
xFair <- sample(1:6, size = n, replace = TRUE)
xFair

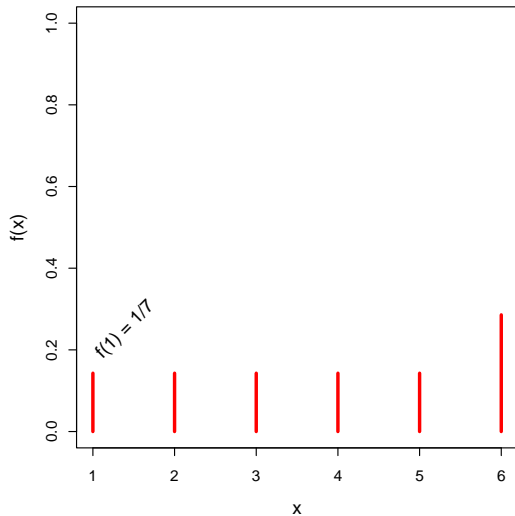
# Count number of each outcome using the 'table' function
table(xFair)

# Plot the empirical pdf
plot(table(xFair)/n, lwd = 10, ylim = c(0,1), xlab = "x",
      ylab = "Density f(x)")
# Add the true pdf to the plot
lines(rep(1/6,6), lwd = 4, type = "h", col = 2)
# Add a legend to the plot
legend("topright", c("Empirical pdf", "True pdf"), lty = 1, col = c(1,2),
      lwd = c(5, 2), cex = 0.8)
```

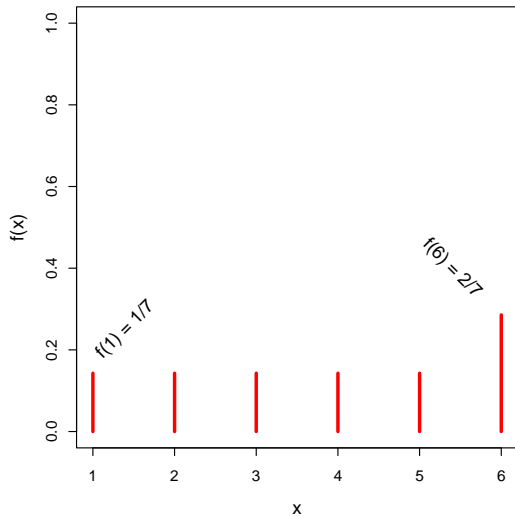
Eksempel: Tæthedsfunktion - Kast med en unfair terning



Eksempel: Tæthedsfunktion - Kast med en unfair terning



Eksempel: Tæthedsfunktion - Kast med en unfair terning



Eksempel: Simulér n kast med en unfair terning

```
# Number of simulated realizations (sample size)
n <- 30

# n independent random draws from the set (1,2,3,4,5,6)
# with higher probability of getting a six
xUnfair <- sample(1:6, size = n, replace = TRUE, prob = c(rep(1/7,5),2/7))
xUnfair

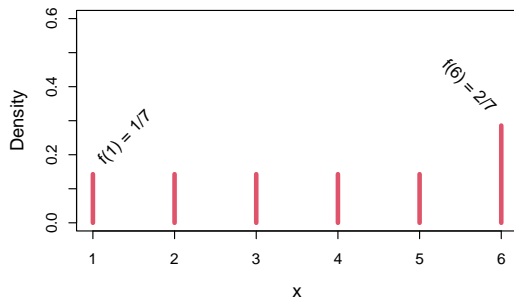
# Plot the empirical pdf
plot(table(xUnfair)/n, lwd = 10, ylim = c(0,1), xlab = "x",
      ylab = "Density f(x)")
# Add the true pdf to the plot
lines(c(rep(1/7,5),2/7), lwd = 4, type = "h", col = 2)
# Add a legend to the plot
legend("topright", c("Empirical pdf","True pdf"), lty = 1, col = c(1,2),
      lwd = c(5, 2), cex = 0.8)
```

Spørgsmål

Lad X beskrive det antal øjne, der fås ved et kast med den *unfair* terning.

Hvad er:

- Sandsynligheden for at få 4?
- Sandsynligheden for at få 5 eller 6?
- Sandsynligheden for at få mindre end 3?



Dagsorden

- 1 Opsummering: Uge 1
- 2 Stokastiske variable og tæthedsfunktioner
- 3 Fordelingsfunktioner**
- 4 Konkrete (diskrete) fordelinger I: Binomialfordelingen
 - Eksempel 1
- 5 Konkrete fordelinger II: Hypergeometrisk fordeling
 - Eksempel 2
- 6 Konkrete fordelinger III: Poissonfordelingen
 - Eksempel 3
- 7 Fordelinger i \mathbb{R}
- 8 Middelværdi og varians (diskrete fordelinger)

Fordelingsfunktion for en diskret stokastisk variabel: Definition 2.9

Fordelingsfunktionen (cumulative distribution function, cdf) for en diskret stokastisk variabel:

Definition

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{j \text{ hvor } x_j \leq x} f(x_j)$$

Der gælder for en fordelingsfunktion (cdf):

- Det er en 'ikke-aftagende' funktion
- Den nærmer sig (konvergerer mod) 1, når $x \rightarrow \infty$

Eksempel: Kast med en fair terning

Lad X repræsentere værdien af et kast med en fair terning.

Find sandsynligheden for at observere en værdi mindre end 3:

Eksempel: Kast med en fair terning

Lad X repræsentere værdien af et kast med en fair terning.

Find sandsynligheden for at observere en værdi mindre end 3:

$$P(X < 3)$$

Eksempel: Kast med en fair terning

Lad X repræsentere værdien af et kast med en fair terning.

Find sandsynligheden for at observere en værdi mindre end 3:

$$P(X < 3) = P(X \leq 2)$$

Eksempel: Kast med en fair terning

Lad X repræsentere værdien af et kast med en fair terning.

Find sandsynligheden for at observere en værdi mindre end 3:

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P(X \leq 2) \\ &= F(2) \text{ fordelingsfunktionen} \end{aligned}$$

Eksempel: Kast med en fair terning

Lad X repræsentere værdien af et kast med en fair terning.

Find sandsynligheden for at observere en værdi mindre end 3:

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P(X \leq 2) \\ &= F(2) \text{ fordelingsfunktionen} \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) \end{aligned}$$

Eksempel: Kast med en fair terning

Lad X repræsentere værdien af et kast med en fair terning.

Find sandsynligheden for at observere en værdi mindre end 3:

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P(X \leq 2) \\ &= F(2) \text{ fordelingsfunktionen} \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= f(1) + f(2) \text{ tæthedsfunktionen} \end{aligned}$$

Eksempel: Kast med en fair terning

Lad X repræsentere værdien af et kast med en fair terning.

Find sandsynligheden for at observere en værdi mindre end 3:

$$\begin{aligned}P(X < 3) &= P(X \leq 2) \\&= F(2) \text{ fordelingsfunktionen} \\&= P(X = 1) + P(X = 2) \\&= f(1) + f(2) \text{ tæthedsfunktionen} \\&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Eksempel: Kast med en fair terning

Find sandsynligheden for at observere en værdi større end eller lig 3:

Eksempel: Kast med en fair terning

Find sandsynligheden for at observere en værdi større end eller lig 3:

$$P(X \geq 3)$$

Eksempel: Kast med en fair terning

Find sandsynligheden for at observere en værdi større end eller lig 3:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$$

Eksempel: Kast med en fair terning

Find sandsynligheden for at observere en værdi større end eller lig 3:

$$\begin{aligned}P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - F(2) \text{ fordelingsfunktionen}\end{aligned}$$

Eksempel: Kast med en fair terning

Find sandsynligheden for at observere en værdi større end eller lig 3:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - F(2) \text{ fordelingsfunktionen} \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dagsorden

- 1 Opsummering: Uge 1
- 2 Stokastiske variable og tæthedsfunktioner
- 3 Fordelingsfunktioner
- 4 Konkrete (diskrete) fordelinger I: Binomialfordelingen**
 - Eksempel 1
- 5 Konkrete fordelinger II: Hypergeometrisk fordeling
 - Eksempel 2
- 6 Konkrete fordelinger III: Poissonfordelingen
 - Eksempel 3
- 7 Fordelinger i \mathbb{R}
- 8 Middelværdi og varians (diskrete fordelinger)

Konkrete (diskrete) statistiske fordelinger

- Der findes en række statistiske fordelinger, som kan bruges til at beskrive og analysere forskellige problemstillinger med.
- I dag gennemgås tre diskrete fordelinger:
 - Binomialfordelingen
 - Den hypergeometriske fordeling
 - Poissonfordelingen

Binomialfordelingen

- Vi betragter et eksperiment med to udfald: "succes" og "fiasko", som gentages et vist antal gange (uafhængige gentagelser).
- Lad X være antallet af succeser efter n gentagelser.

Binomialfordelingen

- Vi betragter et eksperiment med to udfald: "succes" og "fiasko", som gentages et vist antal gange (uafhængige gentagelser).
- Lad X være antallet af succeser efter n gentagelser.
- Så følger X en binomialfordeling m. antalsparameter n og succesparameter p :

$$X \sim B(n, p)$$

- n : antal gentagelser
- p : sandsynligheden for succes i hver gentagelse

Binomialfordelingens tæthedsfunktion

Sandsynligheden for at observere x antal succeser gives ved

$$f(x; n, p) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x},$$

hvor binomialkoefficienten kan beregnes som

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}.$$

Eksempel - Binomialfordelingen

Antag $X \sim B(4, p)$, dvs. $n = 4$. Find sandsynligheden for at observere 3 succeser.

Eksempel - Binomialfordelingen

Antag $X \sim B(4, p)$, dvs. $n = 4$. Find sandsynligheden for at observere 3 succeser.

- Sandsynligheden for 3 succeser er $P(X = 3)$.

Eksempel - Binomialfordelingen

Antag $X \sim B(4, p)$, dvs. $n = 4$. Find sandsynligheden for at observere 3 succeser.

- Sandsynligheden for 3 succeser er $P(X = 3)$.
- De tre succeser kan fremkomme på fire måder:
SSSF, SSFS, SFSS, FSSS.

Eksempel - Binomialfordelingen

Antag $X \sim B(4, p)$, dvs. $n = 4$. Find sandsynligheden for at observere 3 succeser.

- Sandsynligheden for 3 succeser er $P(X = 3)$.
- De tre succeser kan fremkomme på fire måder:
SSSF, SSFS, SFSS, FSSS.
- Altså:

$$\binom{n}{x} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 4,$$

og

$$P(X = 3) = 4p^3(1 - p).$$

Simulation med binomialfordeling

```
## Probability of success
p <- 0.1

## Number of repetitions
nRepeat <- 30

## Simulate Bernoulli experiment 'nRepeat' times
tmp <- sample(c(0,1), size = nRepeat, prob = c(1-p,p), replace = TRUE)

# Compute 'x'
sum(tmp)

## Or: Use the binomial distribution simulation function
rbinom(1, size = 30, prob = p)
```

Eksempel: Kast med en fair terning

```
# Number of simulated realizations (sample size)
n <- 30

# n independent random draws from the set (1,2,3,4,5,6)
# with equal probability for each outcome
xFair <- sample(1:6, size = n, replace = TRUE)

# Count the number of six'es
sum(xFair == 6)

## Do the same using 'rbinom()' instead
rbinom(n = 1, size = 30, prob = 1/6)
```

Eksempel 1

I et kundecenter i et telefonselskab prøver man at forbedre kundetilfredsheden. Det er især vigtigt, at når der indrapporteres en fejl, bliver fejlen udbedret i løbet af samme dag.

Antag at sandsynligheden for, at en fejl bliver udbedret i løbet af samme dag, er 70%.

I løbet af en dag indrapporteres 6 fejl. Hvad er sandsynligheden for at samtlige fejl udbedres?

Eksempel 1

I et kundecenter i et telefonselskab prøver man at forbedre kundetilfredsheden. Det er især vigtigt, at når der indrapporteres en fejl, bliver fejlen udbedret i løbet af samme dag.

Antag at sandsynligheden for, at en fejl bliver udbedret i løbet af samme dag, er 70%.

I løbet af en dag indrapporteres 6 fejl. Hvad er sandsynligheden for at samtlige fejl udbedres?

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?

Eksempel 1

I et kundecenter i et telefonselskab prøver man at forbedre kundetilfredsheden. Det er især vigtigt, at når der indrapporteres en fejl, bliver fejlen udbedret i løbet af samme dag.

Antag at sandsynligheden for, at en fejl bliver udbedret i løbet af samme dag, er 70%.

I løbet af en dag indrapporteres 6 fejl. Hvad er sandsynligheden for at samtlige fejl udbedres?

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?
Antallet af udbedrede fejl.

Eksempel 1

I et kundecenter i et telefonselskab prøver man at forbedre kundetilfredsheden. Det er især vigtigt, at når der indrapporteres en fejl, bliver fejlen udbedret i løbet af samme dag.

Antag at sandsynligheden for, at en fejl bliver udbedret i løbet af samme dag, er 70%.

I løbet af en dag indrapporteres 6 fejl. Hvad er sandsynligheden for at samtlige fejl udbedres?

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?
Antallet af udbedrede fejl.
- **Trin 2)** Hvad er fordelingen af X ?

Eksempel 1

I et kundecenter i et telefonselskab prøver man at forbedre kundetilfredsheden. Det er især vigtigt, at når der indrapporteres en fejl, bliver fejlen udbedret i løbet af samme dag.

Antag at sandsynligheden for, at en fejl bliver udbedret i løbet af samme dag, er 70%.

I løbet af en dag indrapporteres 6 fejl. Hvad er sandsynligheden for at samtlige fejl udbedres?

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?
Antallet af udbedrede fejl.
- **Trin 2)** Hvad er fordelingen af X ?
En binomialfordeling med $n = 6$ og $p = 0.7$.

Eksempel 1

I et kundecenter i et telefonselskab søger man at forbedre kundetilfredsheden. Især er det vigtigt at når der indrapporteres en fejl, bliver fejlen udbedret i løbet af samme dag.

Antag at sandsynligheden for at en fejl bliver udbedret i løbet af samme dag er 70%.

I løbet af en dag indrapporteres 6 fejl. Hvad er sandsynligheden for at samtlige fejl udbedres?

- **Trin 3)** Hvilken sandsynlighed skal udregnes

Eksempel 1

I et kundecenter i et telefonselskab søger man at forbedre kundetilfredsheden. Især er det vigtigt at når der indrapporteres en fejl, bliver fejlen udbedret i løbet af samme dag.

Antag at sandsynligheden for at en fejl bliver udbedret i løbet af samme dag er 70%.

I løbet af en dag indrapporteres 6 fejl. Hvad er sandsynligheden for at samtlige fejl udbedres?

- **Trin 3)** Hvilken sandsynlighed skal udregnes

$$\underline{P(X = 6) = f(6; 6, 0.7)}$$

Dagsorden

- 1 Opsummering: Uge 1
- 2 Stokastiske variable og tæthedsfunktioner
- 3 Fordelingsfunktioner
- 4 Konkrete (diskrete) fordelinger I: Binomialfordelingen
 - Eksempel 1
- 5 Konkrete fordelinger II: Hypergeometrisk fordeling**
 - Eksempel 2
- 6 Konkrete fordelinger III: Poissonfordelingen
 - Eksempel 3
- 7 Fordelinger i \mathbb{R}
- 8 Middelværdi og varians (diskrete fordelinger)

Den hypergeometriske fordeling

- X er igen antallet succeser, men nu *uden* tilbagelægning ved trækningen.

Den hypergeometriske fordeling

- X er igen antallet succeser, men nu *uden* tilbagelægning ved trækningen.
- X følger da den hypergeometriske fordeling

$$X \sim H(n, a, N)$$

- n er antallet af trækninger (gentagelser)
- a er antallet af succeser i populationen
- N er antallet af elementer i (hele) populationen

Den hypergeometriske fordeling

- Sandsynligheden for at få x succeser er

$$f(x; n, a, N) = P(X = x) = \frac{\binom{a}{x} \binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

- n er antallet af trækninger (gentagelser)
- a er antallet af succeser i populationen
- N er antallet af elementer i (hele) populationen

Eksempel 2

I en forsendelse med 10 harddiske har 2 af dem mindre skrammer.

Vi udtager en (tilfældig) stikprøve på 3 harddiske. **Hvad er sandsynligheden for at mindst en af dem har skrammer?**

Eksempel 2

I en forsendelse med 10 harddiske har 2 af dem mindre skrammer.

Vi udtager en (tilfældig) stikprøve på 3 harddiske. **Hvad er sandsynligheden for at mindst en af dem har skrammer?**

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?

Eksempel 2

I en forsendelse med 10 harddiske har 2 af dem mindre skrammer.

Vi udtager en (tilfældig) stikprøve på 3 harddiske. **Hvad er sandsynligheden for at mindst en af dem har skrammer?**

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?
Antallet af harddiske med skramme i stikprøven.

Eksempel 2

I en forsendelse med 10 harddiske har 2 af dem mindre skrammer.

Vi udtager en (tilfældig) stikprøve på 3 harddiske. **Hvad er sandsynligheden for at mindst en af dem har skrammer?**

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?
Antallet af harddiske med skramme i stikprøven.
- **Trin 2)** Hvad er fordelingen af X ?

Eksempel 2

I en forsendelse med 10 harddiske har 2 af dem mindre skrammer.

Vi udtager en (tilfældig) stikprøve på 3 harddiske. **Hvad er sandsynligheden for at mindst en af dem har skrammer?**

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?
Antallet af harddiske med skramme i stikprøven.
- **Trin 2)** Hvad er fordelingen af X ?
En hypergeometrisk fordeling med $n = 3$, $a = 2$ og $N = 10$.

Eksempel 2

I en forsendelse med 10 harddiske har 2 af dem mindre skrammer.

Vi udtager en (tilfældig) stikprøve på 3 harddiske. **Hvad er sandsynligheden for at mindst en af dem har skrammer?**

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?
Antallet af harddiske med skramme i stikprøven.
- **Trin 2)** Hvad er fordelingen af X ?
En hypergeometrisk fordeling med $n = 3$, $a = 2$ og $N = 10$.
- **Trin 3)** Hvilken sandsynlighed skal udregnes?

Eksempel 2

I en forsendelse med 10 harddiske har 2 af dem mindre skrammer.

Vi udtager en (tilfældig) stikprøve på 3 harddiske. **Hvad er sandsynligheden for at mindst en af dem har skrammer?**

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?
Antallet af harddiske med skramme i stikprøven.
- **Trin 2)** Hvad er fordelingen af X ?
En hypergeometrisk fordeling med $n = 3$, $a = 2$ og $N = 10$.
- **Trin 3)** Hvilken sandsynlighed skal udregnes?
 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - f(0; 3, 2, 10)$

Binomial vs. hypergeometrisk

- Binomialfordelingen bruges til at analysere stikprøver med tilbagelægning.
- Den hypergeometriske fordeling bruges til at analysere stikprøver uden tilbagelægning.

Dagsorden

- 1 Opsummering: Uge 1
- 2 Stokastiske variable og tæthedsfunktioner
- 3 Fordelingsfunktioner
- 4 Konkrete (diskrete) fordelinger I: Binomialfordelingen
 - Eksempel 1
- 5 Konkrete fordelinger II: Hypergeometrisk fordeling
 - Eksempel 2
- 6 Konkrete fordelinger III: Poissonfordelingen**
 - Eksempel 3**
- 7 Fordelinger i \mathbb{R}
- 8 Middelværdi og varians (diskrete fordelinger)

Poissonfordelingen

- Poissonfordelingen anvendes ofte som en fordeling (model) for tælleletal, hvor der ikke er nogen naturlig øvre grænse.
- Poissonfordelingen karakteriseres/defineres normalt ved en *intensitet*, som har formen "antal/enhed", ofte benævnt λ .
- Typisk *hændelser per tidsinterval*.

Poissonfordelingen

$$X \sim Po(\lambda)$$

Tæthedsfunktion:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Fordelingsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Eksempel 3

Det antages, at der i gennemsnit bliver indlagt 0.3 patienter pr. dag på københavnske hospitaler som følge af luftforurening.

Hvad er sandsynligheden for at der på en vilkårlig dag bliver indlagt højst 2 patienter som følge af luftforurening?

Eksempel 3

Det antages, at der i gennemsnit bliver indlagt 0.3 patienter pr. dag på københavnske hospitaler som følge af luftforurening.

Hvad er sandsynligheden for at der på en vilkårlig dag bliver indlagt højst 2 patienter som følge af luftforurening?

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?

Eksempel 3

Det antages, at der i gennemsnit bliver indlagt 0.3 patienter pr. dag på københavnske hospitaler som følge af luftforurening.

Hvad er sandsynligheden for at der på en vilkårlig dag bliver indlagt højst 2 patienter som følge af luftforurening?

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?

Antal patienter, der indlægges som følge af luftforurening på en vilkårlig dag.

Eksempel 3

Det antages, at der i gennemsnit bliver indlagt 0.3 patienter pr. dag på københavnske hospitaler som følge af luftforurening.

Hvad er sandsynligheden for at der på en vilkårlig dag bliver indlagt højst 2 patienter som følge af luftforurening?

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?
Antal patienter, der indlægges som følge af luftforurening på en vilkårlig dag.
- **Trin 2)** Hvad er fordelingen af X ?

Eksempel 3

Det antages, at der i gennemsnit bliver indlagt 0.3 patienter pr. dag på københavnske hospitaler som følge af luftforurening.

Hvad er sandsynligheden for at der på en vilkårlig dag bliver indlagt højst 2 patienter som følge af luftforurening?

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?
Antal patienter, der indlægges som følge af luftforurening på en vilkårlig dag.
- **Trin 2)** Hvad er fordelingen af X ?
En poissonfordeling med $\lambda = 0.3$.

Eksempel 3

Det antages, at der i gennemsnit bliver indlagt 0.3 patienter pr. dag på københavnske hospitaler som følge af luftforurening.

Hvad er sandsynligheden for at der på en vilkårlig dag bliver indlagt højst 2 patienter som følge af luftforurening?

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?
Antal patienter, der indlægges som følge af luftforurening på en vilkårlig dag.
- **Trin 2)** Hvad er fordelingen af X ?
En poissonfordeling med $\lambda = 0.3$.
- **Trin 3)** Hvilken sandsynlighed skal udregnes?

Eksempel 3

Det antages, at der i gennemsnit bliver indlagt 0.3 patienter pr. dag på københavnske hospitaler som følge af luftforurening.

Hvad er sandsynligheden for at der på en vilkårlig dag bliver indlagt højst 2 patienter som følge af luftforurening?

- **Trin 1)** Hvad skal repræsenteres af den stokastiske variabel X ?

Antal patienter, der indlægges som følge af luftforurening på en vilkårlig dag.

- **Trin 2)** Hvad er fordelingen af X ?

En poissonfordeling med $\lambda = 0.3$.

- **Trin 3)** Hvilken sandsynlighed skal udregnes?

$$\underline{P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)}$$

Dagsorden

- 1 Opsummering: Uge 1
- 2 Stokastiske variable og tæthedsfunktioner
- 3 Fordelingsfunktioner
- 4 Konkrete (diskrete) fordelinger I: Binomialfordelingen
 - Eksempel 1
- 5 Konkrete fordelinger II: Hypergeometrisk fordeling
 - Eksempel 2
- 6 Konkrete fordelinger III: Poissonfordelingen
 - Eksempel 3
- 7 Fordelinger i R**
- 8 Middelværdi og varians (diskrete fordelinger)

Fordelinger i R

| R | Name |
|-------|---------------------------|
| binom | Binomialfordeling |
| hyper | Hypergeometrisk fordeling |
| pois | Poissonfordeling |

- d Tæthedsfunktion (density)
- p Fordelingsfunktion (probability)
- r Tilfældighedsgenerator: Simulerer tilfældige tal (random number)
- q Fraktilfunktion ("invers" af fordelingsfunktionen) (quantile)

Eksempel: Binomialfordeling, $P(X \leq 5) = F(5; 10, 0.6)$

```
pbinom(q = 5, size = 10, prob = 0.6)
```

```
[1] 0.3669
```

```
# Get help with:
```

```
?pbinom
```

Dagsorden

- 1 Opsummering: Uge 1
- 2 Stokastiske variable og tæthedsfunktioner
- 3 Fordelingsfunktioner
- 4 Konkrete (diskrete) fordelinger I: Binomialfordelingen
 - Eksempel 1
- 5 Konkrete fordelinger II: Hypergeometrisk fordeling
 - Eksempel 2
- 6 Konkrete fordelinger III: Poissonfordelingen
 - Eksempel 3
- 7 Fordelinger i \mathbb{R}
- 8 **Middelværdi og varians (diskrete fordelinger)**

Middelværdi (expectation, expected value)

Middelværdien af en diskret stokastisk variabel, definition 2.13:

Definition

$$\mu = \mathbf{E}(X) = \sum_{\text{alle } x} xf(x)$$

- Det "*sande gennemsnit*" af X (i modsætning til stikprøvegennemsnittet).

Eksempel: Kast med en fair terning

Lad X repræsentere antallet af øjne ved et kast med en fair terning. Så følger X en diskret uniform fordeling (diskret ligefordeling) på intervallet $[1, 6]$ og har middelværdi:

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 3.5\end{aligned}$$

Sammenligning med stikprøvegennemsnittet - lær fra simulationer

```
# Number of simulated realizations (sample size)  
n <- 30  
  
# Sample independently from the set (1,2,3,4,5,6)  
# with equal probability of outcomes  
xFair <- sample(1:6, size = n, replace = TRUE)  
  
# Compute the sample mean  
mean(xFair)
```

```
[1] 3.3
```


Asymptotisk resultat: Store tals lov

Des flere observationer, des tættere kommer vi på den sande middelværdi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu} = \mu$$

- Kaldes *store tals lov* (law of large numbers).

Varians

Variansen af en diskret stokastisk variabel, Definition 2.16:

Definition

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{\text{alle } x} (x - \mu)^2 f(x)$$

- Måler den gennemsnitlige spredning rundt om middelværdien.
- Den “rigtige varians” af X (i modsætning til stikprøvevariansen).

Eksempel: Kast med en fair terning

Lad X repræsentere antallet af øjne ved et kast med en fair terning. Så følger X en diskret uniform fordeling (diskret ligefordeling) på intervallet $[1, 6]$ og har varians:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[(X - \mu)^2] \\ &= (1 - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3 - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\quad + (4 - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5 - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6 - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &\approx 2.92\end{aligned}$$

Sammenligning med stikprøvevariansen - lær fra simulationer

```
# Number of simulated realizations (sample size)  
n <- 30  
  
# Sample independently from the set (1,2,3,4,5,6)  
# with equal probability of outcomes  
xFair <- sample(1:6, size = n, replace = TRUE)  
  
# Compute the sample variance  
var(xFair)
```

```
[1] 2.437
```

Middelværdi og varians for konkrete fordelinger

Binomialfordelingen:

- Middelværdi:

$$\mu = n \cdot p$$

- Varians:

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Middelværdi og varians for konkrete fordelinger

Den hypergeometriske fordeling

- Middelværdi:

$$\mu = n \cdot \frac{a}{N}$$

- Varians:

$$\sigma^2 = \frac{n \cdot a \cdot (N-a) \cdot (N-n)}{N^2 \cdot (N-1)}$$

Middelværdi og varians for konkrete fordelinger

Poissonfordelingen

- Middelværdi:

$$\mu = \lambda$$

- Varians:

$$\sigma^2 = \lambda$$

Dagsorden

- 1 Opsummering: Uge 1
- 2 Stokastiske variable og tæthedsfunktioner
- 3 Fordelingsfunktioner
- 4 Konkrete (diskrete) fordelinger I: Binomialfordelingen
 - Eksempel 1
- 5 Konkrete fordelinger II: Hypergeometrisk fordeling
 - Eksempel 2
- 6 Konkrete fordelinger III: Poissonfordelingen
 - Eksempel 3
- 7 Fordelinger i \mathbb{R}
- 8 Middelværdi og varians (diskrete fordelinger)