02402 Statistik (Polyteknisk grundlag)

Uge 4: Konfidensintervaller

DTU Compute
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby

Dagsorden

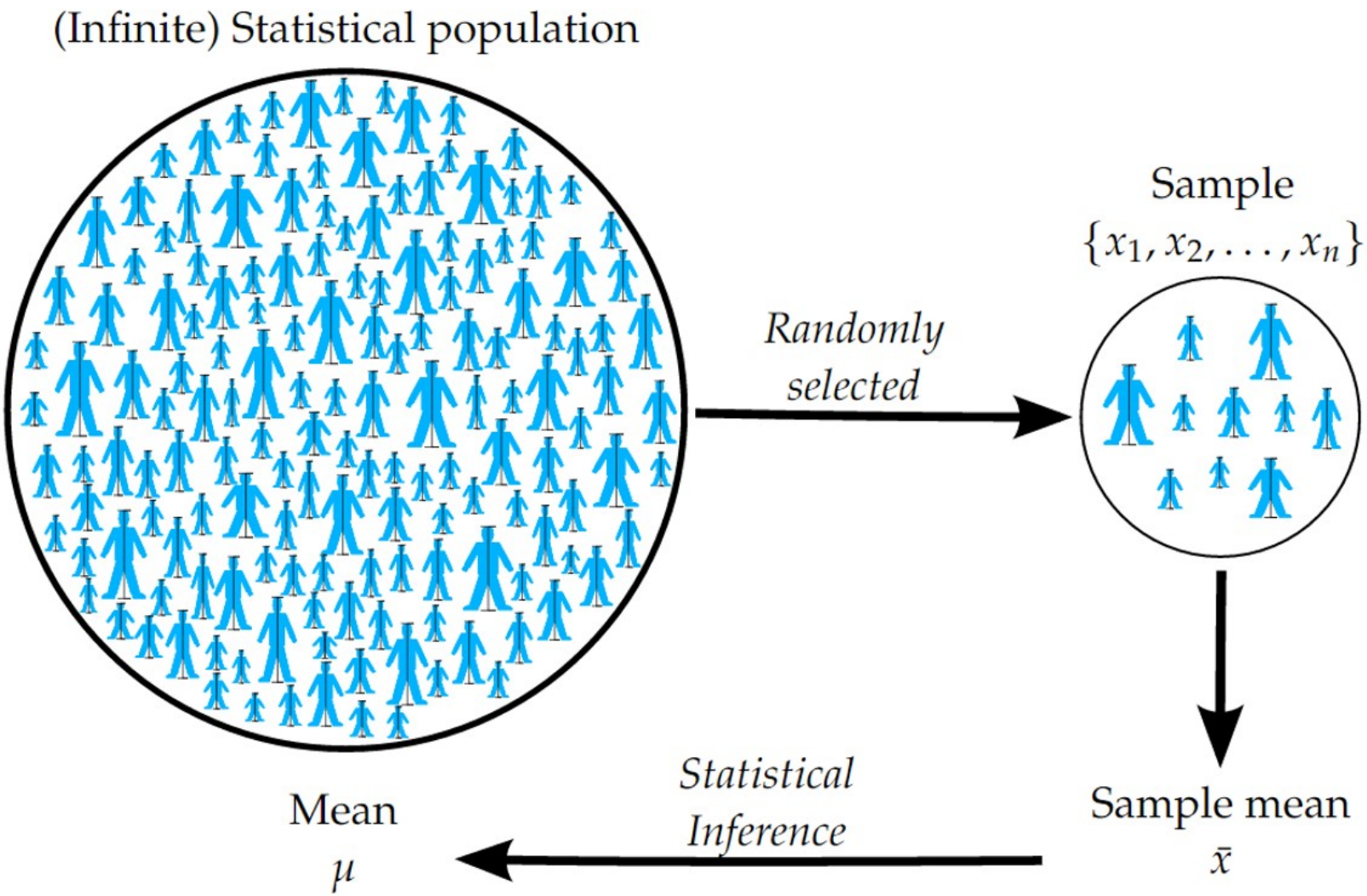
1. Statistisk inferens
2. Når data er normalfordelt
   - Sandsynlighedsfordeling for stikprøvegennemsnittet, $\bar{X}$
   - Standard error of the mean, SEM
   - Konfidensinterval for gennemsnittet
   - Konfidensinterval for varians og spredning
3. Når data ikke er normalfordelt
   - Central Limit Theorem (CLT)

02402 Statistik (Polyteknisk grundlag)

Statistisk inferens

DTU Compute
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby

Populationen og stikprøven



En tilfældig stikprøve

Definition 3.12 Random sample

A random sample from an (infinite) population: A set of observations $X_1, ..., X_n$ constitutes a random sample of size n from the infinite population $f(x)$ if:

1. Each X_i is a random variable whose distribution is given by $f(x)$
2. The n random variables are independent

Hvad betyder det?

1. Alle observationer skal komme fra den samme population
2. De må IKKE dele information med hinanden (f.eks. hvis man havde udtaget hele familier i stedet for enkeltindivider)

Statistisk inferens: Læring fra data

- Vi *antager* en *model* for populationen, fx: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Vi *antager* at vores observationer (data) udgør en *tilfældig stikprøve* (en repræsentativ stikprøve).
- Modellen har nogle *parametre*, fx: μ og σ
- Vi ønsker nu at *estimere* parametrene ud fra data i stikprøven
  - $\hat{\mu} = \bar{x}$ er *estimatet* for μ (konkret udfaldsværdi)
  - $\bar{X}$ er *estimatoren* for μ (nu set som stokastisk variabel)
  - $\hat{\sigma}^2 = s^2$ er *estimatet* for σ^2 (konkret udfaldsværdi)
  - S^2 er *estimatoren* for σ^2 (nu set som stokastisk variabel)
- Ud fra vores antagelser kan vi teoretisk forudsige hvordan vores estimater vil opføre sig - her fra regner vi baglæns for at udtale os om populationen. Konklusioner fra statistisk inferens tager altså udgangspunkt i at antagelserne om modellen holder.

Hvad er usikkerheden?

Hvor godt kan vi stole på estimater?

Kan vi kvantificere hvor gode estimaterne er?

I dag: *Standardfejl* og *konfidensintervaller*

Eksempel - Konfidensintervaller:

Stikprøve, $n = 10$:

168 161 167 179 184 166 198 187 191 179

Eksempel - Konfidensintervaller:

Stikprøve, $n = 10$:

168 161 167 179 184 166 198 187 191 179

Stikprøvegennemsnit og -standardafvigelse:

$$\bar{x} = 178$$

$$s = 12.21$$

Eksempel - Konfidensintervaller:

Stikprøve, $n = 10$:

168 161 167 179 184 166 198 187 191 179

Stikprøvegennemsnit og -standardafvigelse:

$$\bar{x} = 178$$

$$s = 12.21$$

Estimater for populationens middelværdi og standardafvigelse:

$$\hat{\mu} = 178$$

$$\hat{\sigma} = 12.21$$

Eksempel - Konfidensintervaller:

Stikprøve, $n = 10$:

168 161 167 179 184 166 198 187 191 179

Stikprøvegennemsnit og -standardafvigelse:

$$\bar{x} = 178$$
$$s = 12.21$$

Estimater for populationens middelværdi og standardafvigelse:

$$\hat{\mu} = 178$$
$$\hat{\sigma} = 12.21$$

Men hvor godt kan vi egentlig stole på disse estimater?

Eksempel - Konfidensintervaller:

Stikprøve, $n = 10$:

168 161 167 179 184 166 198 187 191 179

Stikprøvegennemsnit og -standardafvigelse:

$$\bar{x} = 178$$
$$s = 12.21$$

Estimater for populationens middelværdi og standardafvigelse:

$$\hat{\mu} = 178$$
$$\hat{\sigma} = 12.21$$

Men hvor godt kan vi egentlig stole på disse estimater?

NYT:**Konfidensintervaller:**

$$\hat{\mu} = \ 178 \ \ [169.3;\ 186.7]$$
$$\hat{\sigma} = 12.21 \ \ [8.4;\ 22.3]$$

Eksempel - underliggende antagelser

- Population: Højderne for alle mennesker i Danmark (eller alle studerende i Danmark?).
- Data: Vi antager at vores 10 målinger udgør en repræsentativ stikprøve af populationen.
- Model: Vi antager at højderne kan beskrives med en stokastisk variabel, X, der følger en eller anden fordeling (beskrevet ved $f(x)$ eller pdf).

En statistisk model

Før vi kan beregne konfidensintervaller, må vi antage en lidt mere konkret model.

I dag (og i mange kommende uger) vil vi antage at data følger en Normalfordeling. Dvs vores **statistiske model** er:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

En anden måde at skrive modellen er:

$$X_i = \mu + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

(dvs den enkelte observation beskrives som en gennemsnitlig værdi plus en "fejl"/"afvigelse"/"residual" beskrevet ved den stokastiske variabel ε)

02402 Statistik (Polyteknisk grundlag)

Når data er normalfordelt

- Sandsynlighedsfordeling for stikprøvegennemsnittet, $\bar{X}$
- Standard error of the mean, SEM
- Konfidensinterval for gennemsnittet
- Konfidensinterval for varians og spredning

DTU Compute
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby

Normalfordelt data

I det følgende vil vi betragte en stikprøve, $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, af **normalfordelt data**.

Den **enkelte observation** beskrives med en **stokastisk variabel**: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Stikprøvegennemsnittet: $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_i + ... + X_n)$
$\bar{X}$ er selv en **stokastisk variabel** (med sin egen fordeling).

Stikprøvevariansen: $S^2 = \frac{1}{n-1}((X_i - \mu)^2 + ... + (X_n - \mu)^2)$
S^2 er selv en **stokastisk variabel** (med sin egen fordeling).

- Gå Python notebook "Simulation_normal_sample.ipynb" i VS Code

02402 Statistik (Polyteknisk grundlag)

- Sandsynlighedsfordeling for stikprøvegennemsnittet, $\bar{X}$
- Standard error of the mean, SEM
- Konfidensinterval for gennemsnittet
- Konfidensinterval for varians og spredning

DTU Compute
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby

Middelværdien og variansen følger af regneregler (2.56)

Stikprøvegennemsnittet er en lineær kombination af normalfordelte stokastiske variable:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \ldots + \frac{1}{n}X_n$$

Middelværdien af $\bar{X}$:

$$\mathsf{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n}\mathsf{E}[X_1] + \frac{1}{n}\mathsf{E}[X_2] + \ldots + \frac{1}{n}\mathsf{E}[X_n] = n\frac{1}{n}\mu = \mu$$

Variansen for $\bar{X}$:

$$\mathsf{V}[\bar{X}] = \frac{1}{n^2}\mathsf{V}[X_1] + \frac{1}{n^2}\mathsf{V}[X_2] + \ldots + \frac{1}{n^2}\mathsf{V}[X_n] = n\frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Fordelingen af $\bar{X}$:

En lineær kombination af normalfordelte stokastiske variable vil også selv være **normalfordelt**.

Fordeling for stikprøvegennemsnittet af normalfordelte variable

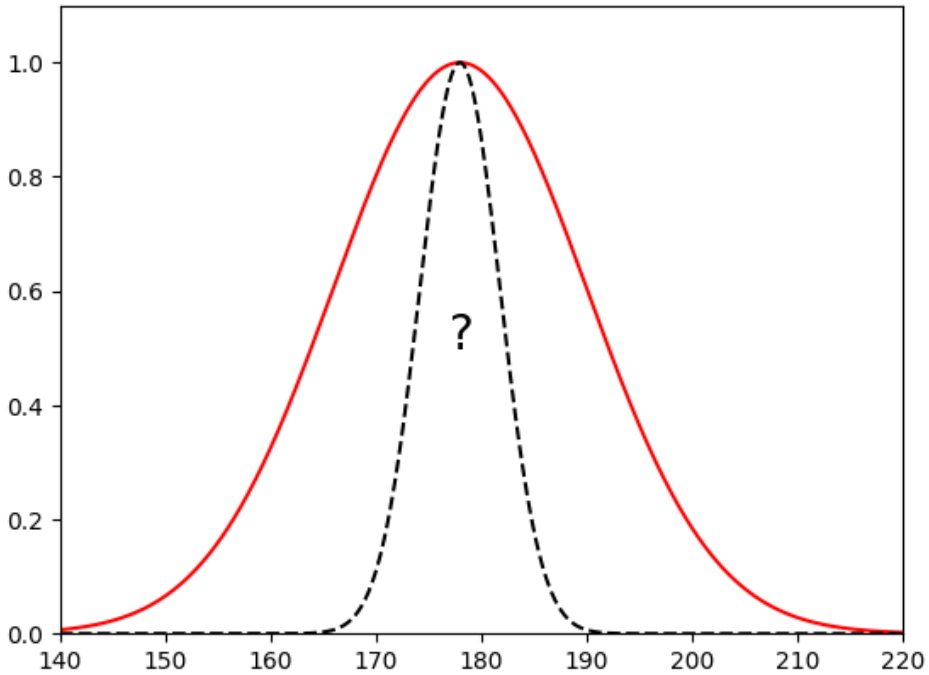
Theorem 3.3 The distribution of the mean of normal random variables

Assume that $X_1, \ldots, X_n$ are independent and identically normally distributed random variables, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, \ldots, n$, then

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \tag{3-2}$$

(Teoretisk) fordeling for stikprøvegennemsnittet

Hvis data følger den røde normalfordeling, vil stikprøvegennemsnittet følge den sorte - smallere - normalfordeling.



Kahoot!

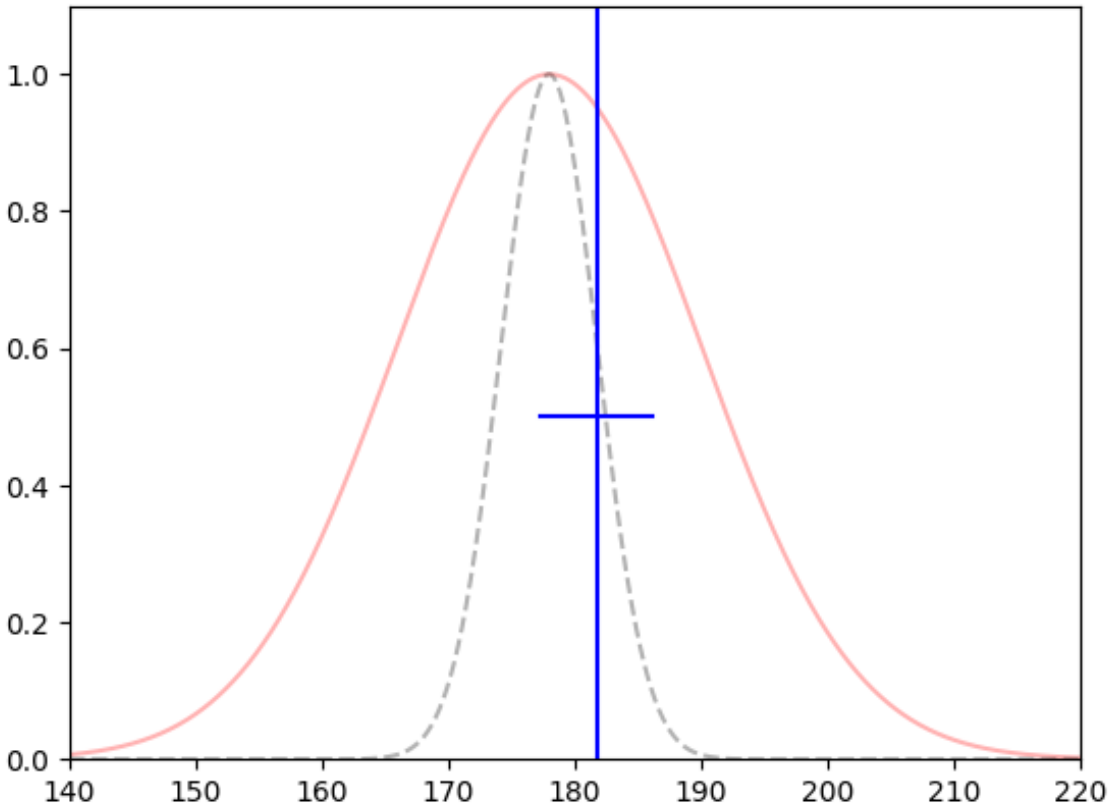
(x2)

Hvad er typiske værdier af $\bar{X}$ i ovenstående eksempel?

I praksis

I praksis kender vi IKKE populationens μ og σ^2.

Vi har estimeret $\bar{x}$ of s^2 fra vores stikprøve data (angivet med blå i plottet).



02402 Statistik (Polyteknisk grundlag)

- Sandsynlighedsfordeling for stikprøvegennemsnittet, $\bar{X}$
- Standard error of the mean, SEM
- Konfidensinterval for gennemsnittet
- Konfidensinterval for varians og spredning

DTU Compute
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby

Hvor stor fejl $(\bar{X} - \mu)$?

Når vi estimerer μ med $\bar{X}$, må vi forvente at have en vis usikkerhed - eller "fejl".
Vi kan beskrive fejlen som en **stokastisk variabel**: $fejl = (\bar{X} - \mu)$.

- Den gennemsnitlige fejl er nul: $\mathrm{E}[fejl] = \mathrm{E}[\bar{X} - \mu] = \mu - \mu = 0$
- Men variansen af fejlen er: $\mathrm{V}[fejl] = \mathrm{V}[\bar{X} - \mu] = \mathrm{V}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$
- fejlen er normalfordelt: $fejl \sim N(0, \sigma^2/n)$
- Og dermed er **standardafvigelsen af fejlen**: $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Kahoot!
(x2)

Standard Error of the Mean

I praksis kender man ikke σ, men estimerer $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ med: $\frac{s}{\sqrt{n}}$. Sidstnævnte har sit eget navn, nemlig "Stadardfejlen på middelværdien":

Definition 3.7 Standard Error of the mean

Given a sample $X_1, \ldots, X_n$, the *Standard Error of the Mean* is defined as

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}. \tag{3-9}$$

It can also be read as the *Sampling Error* of the mean, and can be called the standard deviation of the *sampling distribution* of the mean.

Kahoot!

(x2)

02402 Statistik (Polyteknisk grundlag)

- Sandsynlighedsfordeling for stikprøvegennemsnittet, $\bar{X}$
- Standard error of the mean, SEM
- Konfidensinterval for gennemsnittet
- Konfidensinterval for varians og spredning

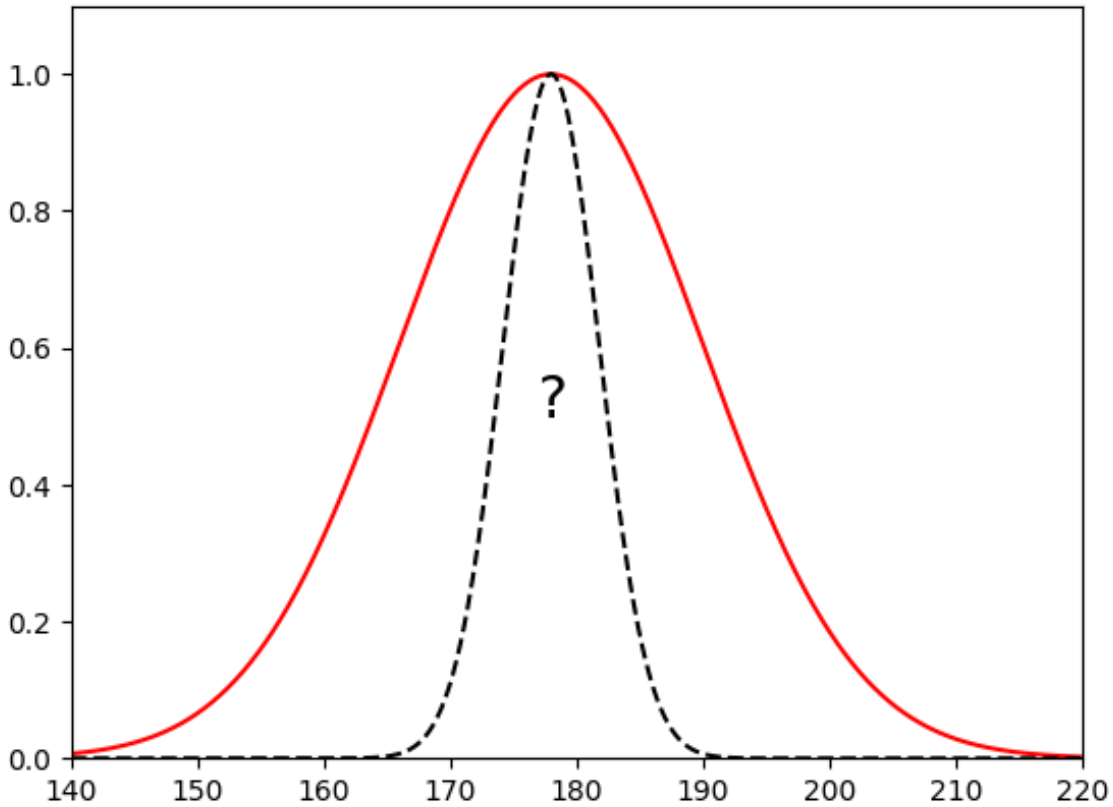
DTU Compute
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby

Hvad kan vi forvente om værdien af $\bar{X}$?

I praksis har vi kun én stikprøve og derfor kun én observation af $\bar{X}$.

Men ud fra vores teori *ved* vi at $\bar{X}$ *med 95% sandsynlighed* vil ligge i intervallet:

$$[\mu - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$



Standardiseret version af de samme ting

Theorem 3.4 The distribution of the σ-standardized mean of normal random variables

Assume that $X_1, \ldots, X_n$ are independent and identically normally distributed random variables, $X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ where $i = 1, \ldots, n$, then

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N\left(0, 1^2\right). \tag{3-7}$$

That is, the standardized sample mean Z follows a standard normal distribution.

Sandsynligheden for at Z ligger i intervallet $[-1.96; 1.96]$ er 95%.

Disse tal (-1.96 og $+1.96$) er fraktiler i standardnormalfordelingen:
$P(Z \leq -1.96) = 0.025$
$P(Z \leq +1.96) = 0.925$

Kahoot!
(x2)

Hvad er "ekstreme værdier" af $|Z|$?

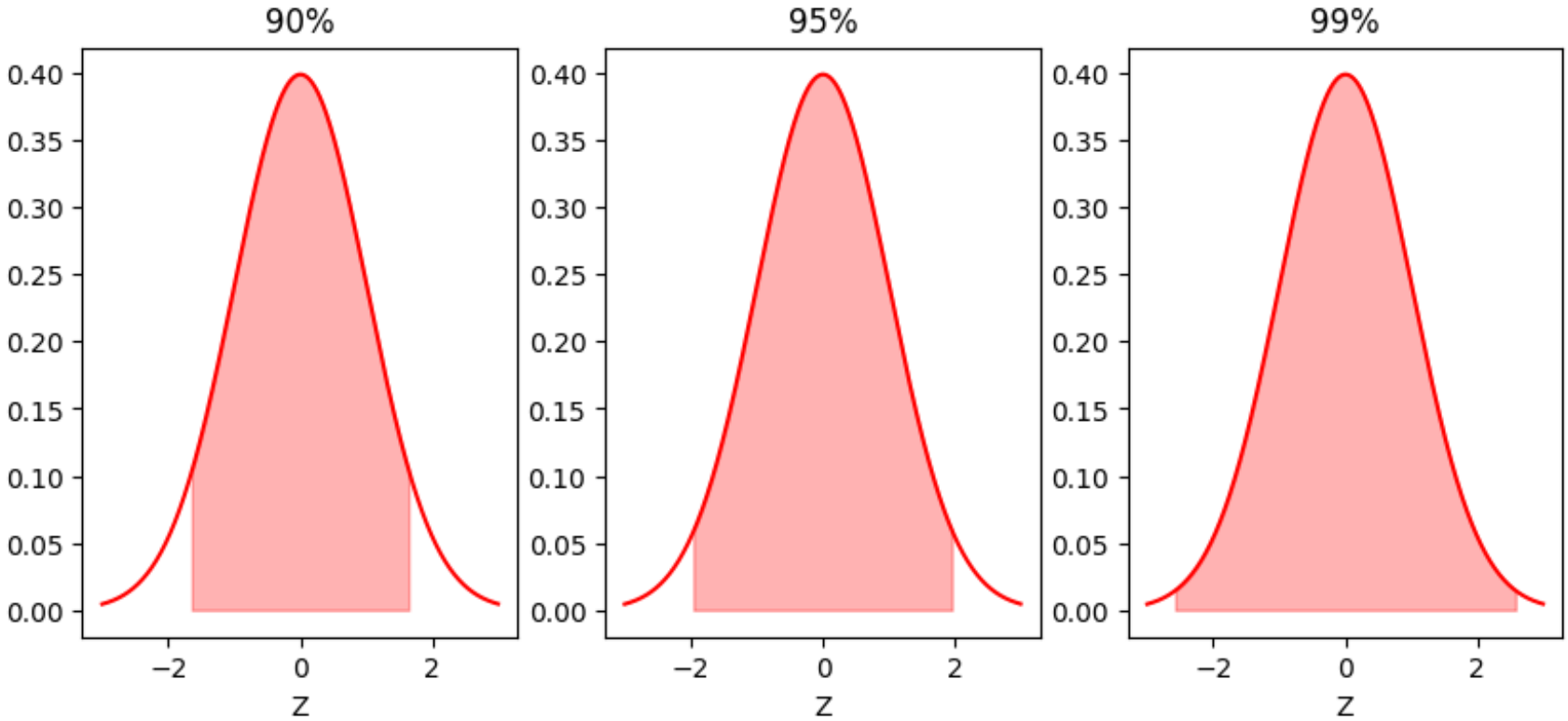
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N\left(0, 1^2\right)$$

Store værdier af $|Z|$ (også kaldet "**ekstreme værdier**"), svarer til situationer hvor $\bar{X}$ er meget langt fra μ - dvs. man har været "uheldig" med stikprøven i den forstand at estimatet ($\hat{\mu} = \bar{x}$) ligger langt fra den sande værdi μ.

I det følgende vil vi bygge på en antagelse om at man nok ikke har været "alt for uheldig", med den konkrete stikprøve. Præcis hvor uheldig(/heldig) kvantificeres med et "**signifiansniveau**".

Z-intervaller

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N\left(0, 1^2\right)$$



De "ekstreme" tilfælde (vi kunne også sige "ekstremt uheldige" tilfælde) ligger udenfor det røde interval.

Interval for μ

Man skal vælge et **"signifikans-niveau"** α, svarende til det interval man vil fokusere på.

Herefter kan man ud fra intervalgrænser på Z *regne baglæns* for at få interval for μ.

Eksempel med interval der dækker 95% $(\alpha = 0.05)$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{0.025} \quad \text{og} \quad Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.975}$$

Omregn de to uligheder til et tilsvarende interval for μ:

(Bemærk at $z_{0.025} = -z_{0.975}$)

Praktisk problem i alt dette!

Hvordan skal resultaterne fra de foregående slides omsættes til et konkret interval for μ?

Problemet: Populationsspredningen σ indgår i alle formlerne.

Oplagt løsning:

Anvend estimtatet s i stedet for σ i formlerne!

MEN:

Så bryder den givne teori faktisk sammen!

HELDIGVIS:

Findes der en udvidet teori, der kan klare det!

Mere anvendeligt resultat:

Vi betragter i stedet den stokastiske variabel: $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$

I udtrykket for T indgår to stokastiske variable: $\bar{X}$ og S^2

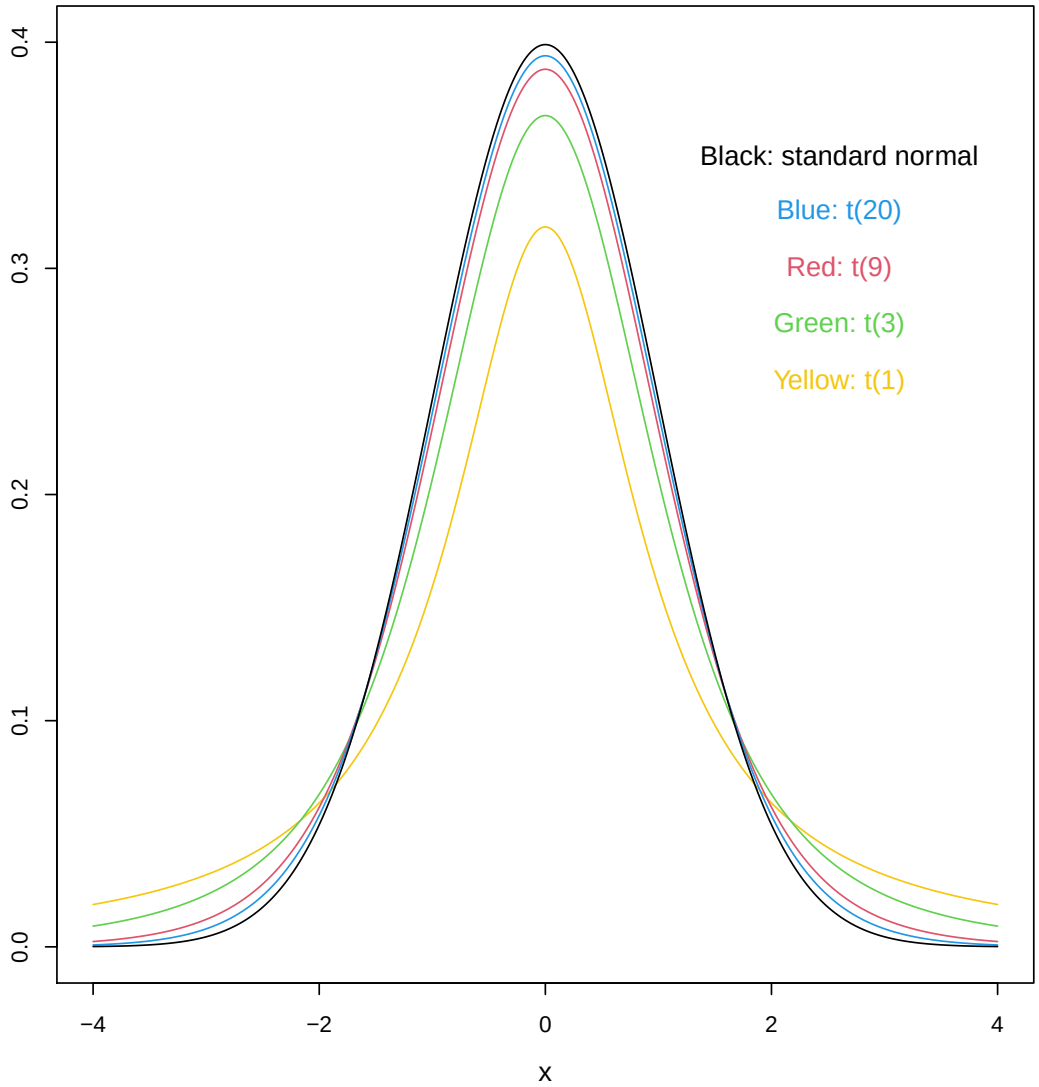
Theorem 3.5 The distribution of the S-standardized mean of normal random variables

Assume that $X_1, \ldots, X_n$ are independent and identically normally distributed random variables, where $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ and $i = 1, \ldots, n$, then

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1), \tag{3-8}$$

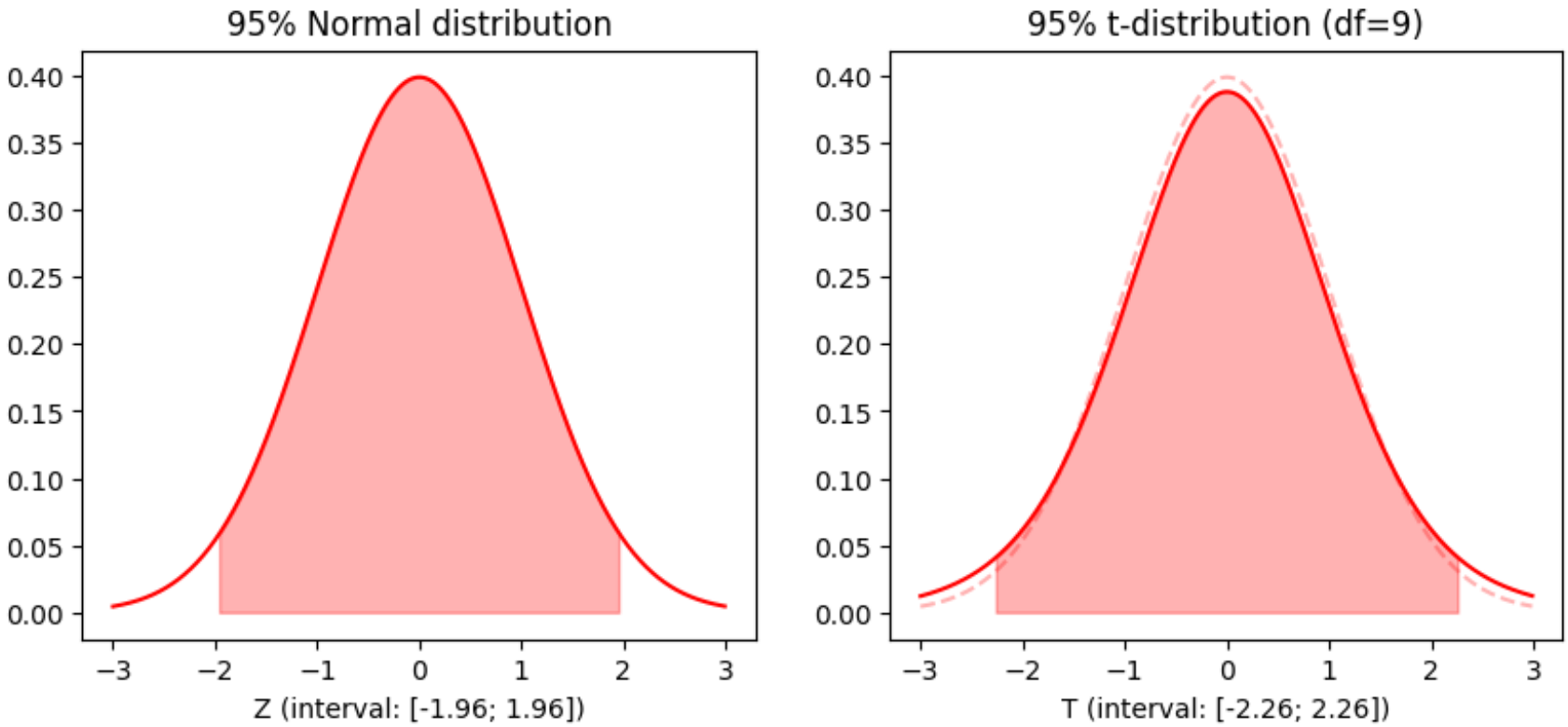
where $t(n-1)$ is the t-distribution with $n-1$ degrees of freedom.

t-fordelingen:



Jo, mindre antal af frihedsgrader (mindre $n-1$), jo tungere haler.

t-fordelingen med 9 frihedsgrader og standardnormalfordelingen:



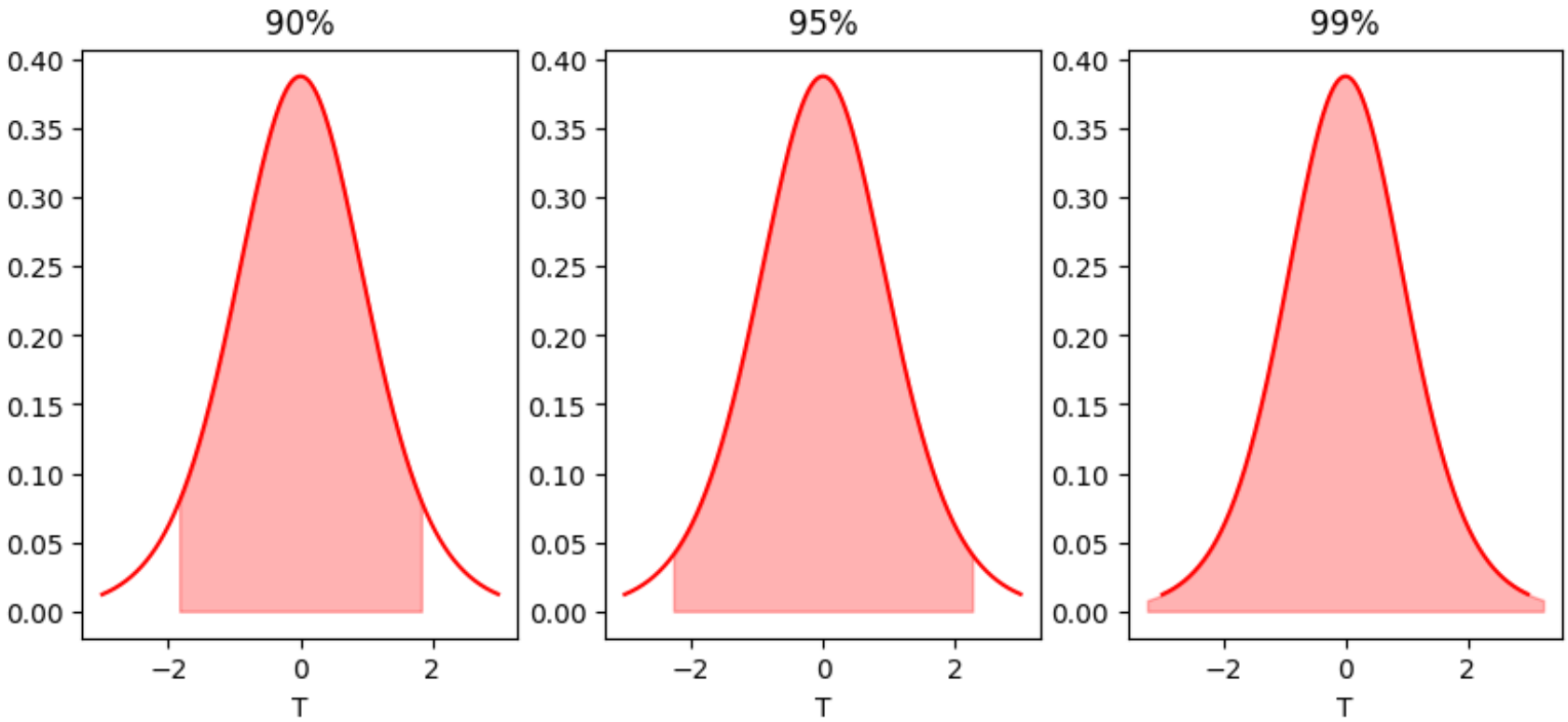
t-fordelingen ligner Normalfordelingen.

I t-fordelingen er sandsynlighedsmassen lidt bredere fordelt.

Bredden på t-fordelingen afhænger af antallet af frihedsgrader (df).

T-intervaller

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



Store værdier af $|T|$ ("ekstreme værdier"), svarer til situationer hvor man har været "uheldig" med stikprøven i den forstand at estimatet $\hat{\mu} = \bar{x}$ ligger langt fra den sande værdi μ (evt samtidigt med at s er meget lille).

Interval for μ

Igen vælges et **"signifikans-niveau"** α, og vi *regner baglæns* for at få et interval for μ.

Eksempel med interval der dækker 95%:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} > t_{0.025} \quad \text{og} \quad T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{0.975}$$

Omregn de to uligheder til et tilsvarende interval for μ:

(Bemærk at $t_{0.025} = -t_{0.975}$)

Konfidensinterval for μ

Method 3.9 The one sample confidence interval for μ

For a sample $x_1, \ldots, x_n$ the $100(1-\alpha)\%$ confidence interval is given by

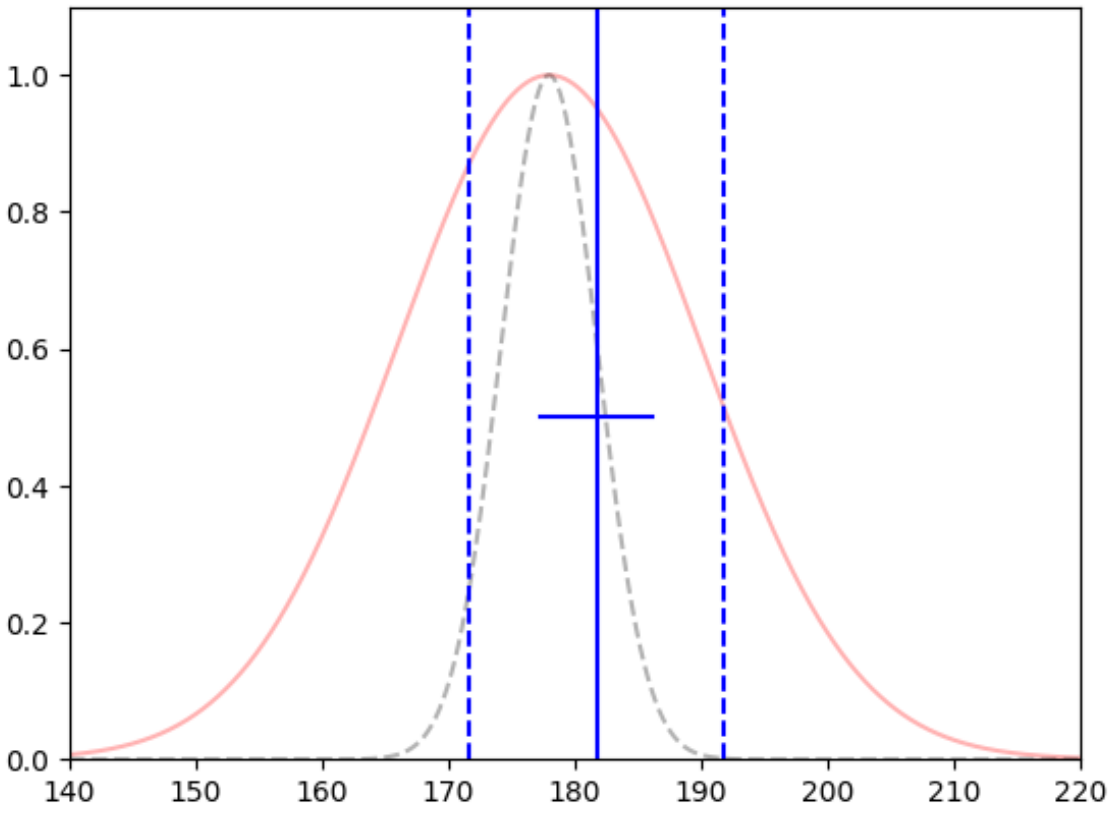
$$\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{3-10}$$

where $t_{1-\alpha/2}$ is the $(1-\alpha/2)$ quantile from the t-distribution with $n-1$ degrees of freedom.[a]
Most commonly used is the 95%-confidence interval:

$$\bar{x} \pm t_{0.975} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}. \tag{3-11}$$

Visualisering af det enkelte tilfælde

Vi har nu estimeret $\bar{x}$ of s^2 fra vores stikprøve data.
Vi kender ikke de "rigtige" μ og σ^2, vi kan angive et **konfidensinterval** for μ.
Sammen med et konfidensinterval bør man altid oplyse signifikansniveauet α.



Kahoot!
(x3)

'Repeated sampling' fortolkning

Hvis $\alpha = 0.05$:

$$P\left(\bar{X} - t_{0.975}\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{0.975}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0.95.$$

I det lange løb fanger vi den sande værdi i 95% af tilfældene:

Konfidensintervallet vil variere i både bredde (s) og position ($\bar{x}$), hvis man gentager sit studie.

Signifikans-niveau'et: α

Signifikans-niveau "α":

Et 95% konfidensinterval svarer til $\alpha = 0.05$.

Et 99% konfidensinterval svarer til $\alpha = 0.01$, osv.

Ofte vælges $\alpha = 0.05$.

Fraktiler i t-fordelingen skal findes med Python

Når vi skal beregne konfidensintervaller har vi brug for fraktiler fra t-fordelingen.

For at finde disse skal vi kende α (for 95% konfidensinterval er $\alpha = 0.05$) og vi skal kende antallet af frihedsgrader $\nu = n - 1$ (hvor n er stikprøvestørrelsen).

Vi skal da finde $(1 - \alpha/2)$-fraktilen i en $t(n-1)$-fordeling (denne fraktil kaldes "$t_{1-\alpha/2}$").

Eksempel med $t_{0.975}$ (dvs $\alpha = 0.05$) og $n = 30$ (en stikprøve på 30 observationer):

```
stats.t.ppf(q=0.975, df=29)
```

Se også Appendix A.2.1 (afsnit of t-fordeling) i bogen.

02402 Statistik (Polyteknisk grundlag)

- Sandsynlighedsfordeling for stikprøvegennemsnittet, $\bar{X}$
- Standard error of the mean, SEM
- Konfidensinterval for gennemsnittet
- Konfidensinterval for varians og spredning

DTU Compute
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby

Python: (Empirisk) Fordeling at stikprøvevariansen

Nu har vi snakket meget om stikprøve**gennemsnittet** (μ).

Men hvad med stikprøve**variansen** (σ^2)?

- Gå Python notebook "Simulation_normal_sample.ipynb" i VS Code

Fordelingen for stikprøvevariansen

Vi betragter nu den stokastiske variabel: $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

I udtrykket for χ^2 indgår den stokastiske variabel S^2

Theorem 2.81

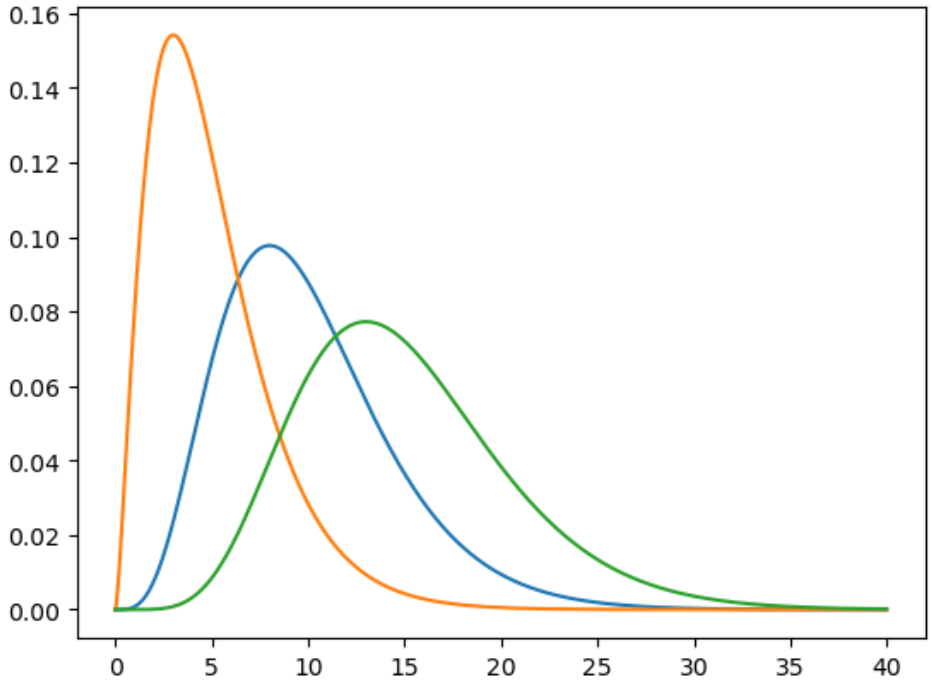
Given a sample of size n from the normal distributed random variables X_i with variance σ^2, then the sample variance S^2 (viewed as random variable) can be transformed into

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}, \tag{2-95}$$

which follows the χ^2-distribution with degrees of freedom $\nu = n - 1$.

Bemærk notationen: Den stokastiske variabel "χ^2" følger en χ^2-fordeling.

χ^2-fordelingen



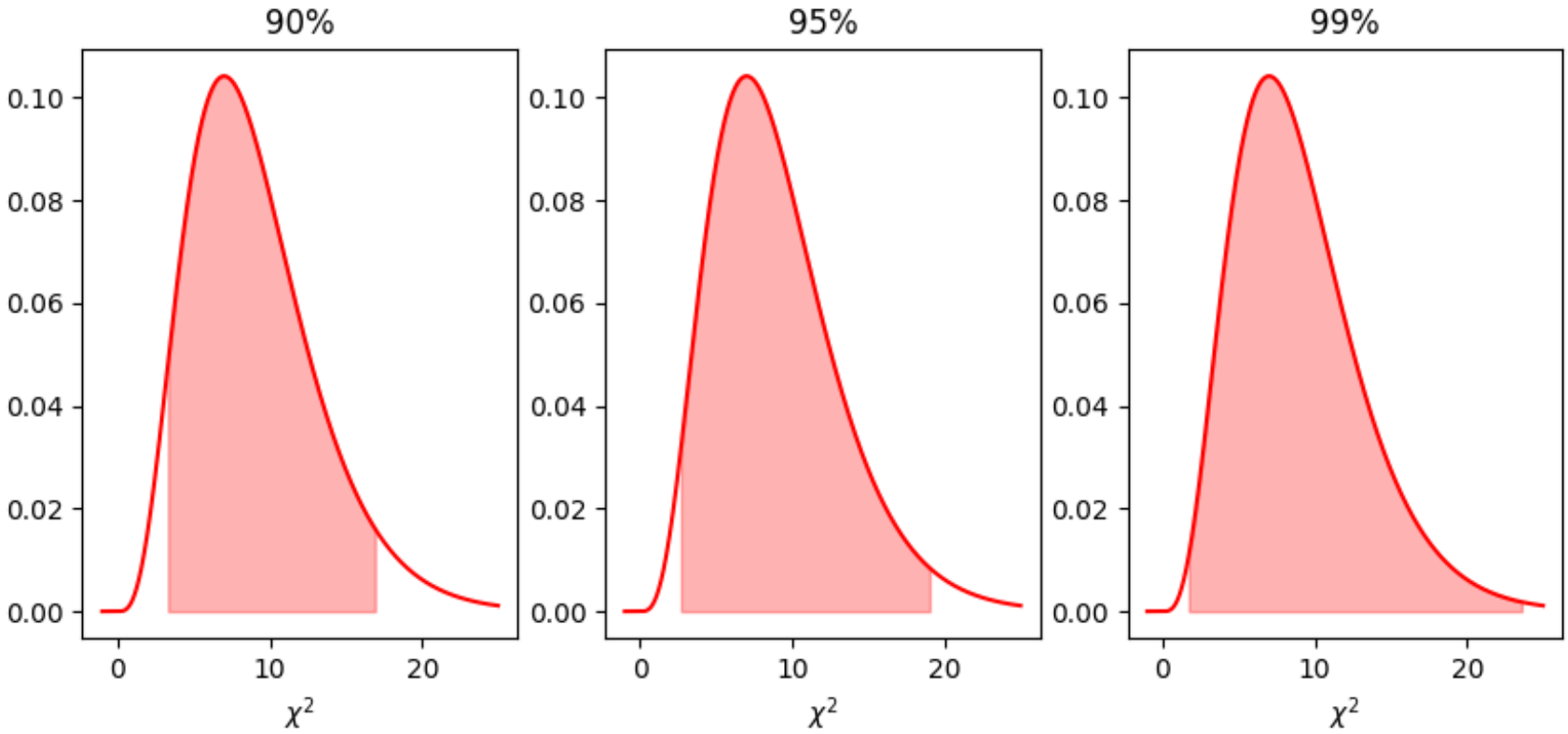
$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

χ^2-fordelingen er ikke symmetrisk.

Kan χ^2 blive negativ? Hvornår er χ^2 stor/lille? Hvornår er $\chi^2 = n-1$? Hvad er $E[\chi^2]$?

χ^2-intervaller

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$



Store/små værdier af χ^2 ("ekstreme værdier"), svarer til situationer hvor man har været "uheldig" med stikprøven i den forstand at estimatet $\hat{\sigma}^2 = S^2$ er meget større/mindre end den sande værdi σ^2.

Interval for σ^2

Igen vælges et **"signifikans-niveau"** α, og vi *regner baglæns* for at få et interval for σ^2.

Eksempel med interval der dækker 95%:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{0.025} \quad \text{og} \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{0.975}$$

Omregn de to uligheder til et tilsvarende interval for σ^2:

Konfidensinterval for σ^2 (og σ)

Method 3.19 Confidence interval for the variance/standard deviation

A $100(1-\alpha)\%$ confidence interval for the variance σ^2 is

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right], \tag{3-18}$$

where the quantiles come from a χ^2-distribution with $\nu = n-1$ degrees of freedom.

A $100(1-\alpha)\%$ confidence interval for the standard deviation σ is

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}}\right]. \tag{3-19}$$

Fraktiler i χ^2-fordelingen skal findes med Python

Når vi skal beregne konfidensintervaller for σ^2 har vi brug for fraktiler fra χ^2-fordelingen.

For at finde disse skal vi kende α og antallet af frihedsgrader $\nu = n - 1$ (n er stikprøvestørrelsen).

$(1-\alpha/2)$-fraktilen i en $\chi^2(n-1)$-fordeling kaldes "$\chi^2_{1-\alpha/2}$".
$(\alpha/2)$-fraktilen i en $\chi^2(n-1)$-fordeling kaldes "$\chi^2_{\alpha/2}$".

Eksempel med $\chi^2_{0.975}$ og $\chi^2_{0.025}$ (dvs $\alpha = 0.05$) og $n = 30$ (en stikprøve på 30 observationer):

```
stats.chi2.ppf(q=0.975, df=29)
stats.chi2.ppf(q=0.025, df=29)
```

Kahoot!
(x2)

Se også Appendix A.2.1 (afsnit of χ^2-fordeling) i bogen.

Eksempel med konfidensinterval for s

En konditor skal bruge en masse ensartede jordbær til en kage. Han ønsker at købe jordbær fra den leverandør der kan sælge mest ensartede bær - dvs. han ønsker spredningen på jordbærenes diameter skal være så lille som muligt.

Som test køber han en bakke med 23 jordbær og måler disses diameter på det bredeste sted. Jordbærenes diameter har gennemsnit 3 cm og standard afvigelse 0.5 cm.

Konditoren ønsker nu at beregne et 95% konfidensinterval på stadardafvigelsen.

Det oplyses at:

```
stats.chi2.ppf(0.025, df=22) = 3.31396
stats.chi2.ppf(0.975, df=22) = 6.06471
```

Hvad er signifikansniveauet?

Beregn konfidensintervallet for s. Er det de rigtige fraktiler der er oplyst?

02402 Statistik (Polyteknisk grundlag)

Når data ikke er normalfordelt

- Central Limit Theorem (CLT)

DTU Compute
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby

Middelværdien og variansen følger af regneregler (2.56)

Stikprøvegennemsnittet er en lineær kombination af normalfordelte stokastiske variable:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n}X_2 + \ldots + \frac{1}{n}X_n$$

Middelværdien af $\bar{X}$:

$$\mathsf{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n}\mathsf{E}[X_1] + \frac{1}{n}\mathsf{E}[X_2] + \ldots + \frac{1}{n}\mathsf{E}[X_n] = n\frac{1}{n}\mu = \mu$$

Variansen for $\bar{X}$:

$$\mathsf{V}[\bar{X}] = \frac{1}{n^2}\mathsf{V}[X_1] + \frac{1}{n^2}\mathsf{V}[X_2] + \ldots + \frac{1}{n^2}\mathsf{V}[X_n] = n\frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Fordelingen af $\bar{X}$:

Det ved vi ikke!

Python: CLT in action

Lad os prøve at simulere nogle forskellige situationer.

- Gå til dagens Python notebook i VS Code
  - "CLT in action"

02402 Statistik (Polyteknisk grundlag)

- Central Limit Theorem (CLT)

DTU Compute
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby

Den centrale grænseværdisætning (CLT)

Theorem 3.14 Central Limit Theorem (CLT)

Let $\bar{X}$ be the sample mean of a random sample of size n taken from a population with mean μ and variance σ^2, then

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \tag{3-12}$$

is a random variable which distribution function approaches that of the standard normal distribution, $N(0, 1^2)$, as $n \to \infty$. In other words, for large enough n, it holds approximately that

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1^2). \tag{3-13}$$

Konsekvens af den centrale grænseværdisætning:

Konfidensintervallet for μ gælder også for ikke-normale data:

Konfidensintervaller for gennemsnit kan beregnes baseret på t-fordelingen i stort set alle situationer, blot n er "stor nok".

Konsekvens af den centrale grænseværdisætning:

Konfidensintervallet for μ gælder også for ikke-normale data:

Konfidensintervaller for gennemsnit kan beregnes baseret på t-fordelingen i stort set alle situationer, blot n er "stor nok".

Hvornår er n "stor nok"?

Faktisk svært at svare præcist på, MEN:

- **Tommelfingerregel:** $n \geq 30$
- Selv for mindre n kan formlen være (næsten)gyldig for ikke-normale data (især hvis data følger en nogenlunde symmetrisk fordeling).

OBS: CLT gælder for **gennemsnit** - ikke varians!

Eksempel: Eksamensopgave fra 2016

Opgave IX

Et kursus på en højere læreranstalt bliver udbudt hvert semester, typisk med flere end 300 studerende, der går til eksamen. Eksamensresultaterne, for 280 studerende, der har bestået kurset ved den sidste eksamen, er gengivet i nedenstående tabel. Eksempelvis ses, at 24 studerende fik karakteren 12. Fordelingen af de 280 karakterer indgår i de 4 næste spørgsmål.

Karakter	02	4	7	10	12	I alt
Antal	22	78	84	72	24	280

Data kan indlæses i R ved:

```
karakterer = rep(x=c(2,4,7,10,12), times=c(22,78,84,72,24))
```

Spørgsmål IX.1 (12)

Benyt den centrale grænseværdisætning til at bestemme et 95% konfidensinterval for middelkarakteren baseret på de studerende, der har bestået eksamen (Det er vigtigt i dette spørgsmål, at karakterene opfattes numerisk, fx. svarer 02 til tallet 2 osv.).

Python: Eksamensopgave fra 2016

- Gå Python notebook "exam_q12_2016.ipynb" i VS Code

Dagsorden

1. Statistisk inferens
2. Når data er normalfordelt
   - Sandsynlighedsfordeling for stikprøvegennemsnittet, $\bar{X}$
   - Standard error of the mean, SEM
   - Konfidensinterval for gennemsnittet
   - Konfidensinterval for varians og spredning
3. Når data ikke er normalfordelt
   - Central Limit Theorem (CLT)

Tjekliste

Efter i dag skal du kunne:

- Forklare hvornår en stikprøve er repræsentativ, og vurdere om specifikke stikprøver er repræsentative for deres relevante population.
- Estimere populationens μ (estimeres med $\bar{x}$) og σ (estimeres med s) ud fra stikprøvedata. Forstå og forklar princippet med estimater som stokastiske variable.
- Beregne SEM ud fra stikprøvedata.
- Beregne konfidensintervaller for μ og σ ud fra (normalfordelt) stikprøve data og et givent konfidens niveau.
- Beskrive teorien der ligger til grund for bregning af konfidensintervaller, herunder de stokastiske variable $T = (\bar{X} - mu)/(s/\sqrt{n})$ og $\chi^2 = (n-1)S^2/\sigma^2$ og deres fordelinger.
- Forklare konceptet "signifikans niveau" (α), inkl. hvordan dette indgår i beregninger for fx. konfidensintervaller.
- Beskrive konsekvensen af CLT og anvende dette i praksis (kend tommelfingerreglen om $n \geq 30$)
- PYTHON: Finde fraktiler i t- og χ^2-fordelinger

Øvelser

- Bygning 306 1. sal.
  - 105 (øvelseslokale 96). Hjælpelærer: Nuria
  - 122 (øvelseslokale 98). Hjælpelærer: Ali (KID students)
  - 119 (øvelseslokale 99). Hjælpelærer: Alfred (KID students, overflow)
  - 108A. Hjælpelærer: Afonso
  - 108B. Hjælpelærer: Uffe
  - Man kan også sidde i foyerområdet ved trappen. Hjælpelærer: Sarah
- Bygning 324, stueetagen.
  - 060. Hjælpelærer: Phd-student Kyril
  - 040. Hjælpelærer: Phd-student Thea
  - 050. Hjælpelærer: Jakob
  - 020. Hjælpelærer: Drin
  - 030. Hjælpelærer: Maliha
  - Man kan også sidde i foyerområde 003, 004, 005 og 008.

Øvelser Uge 4

3.2 Man skal bruge Python til at finde fraktiler i diverse fordelinger. Bemærk at der er lidt afrundingsfejl i løsningerne.

3.11 Man skal bruge Python til at finde fraktiler og sandsynligheder i diverse fordelinger. Brug også gerne Python til at beregne diverse statistiske nøgletal for stikprøven (gennemsnit, varians osv).

Tid til overs bruges på at arbejde på Projektet (nu kan man beregne konfidensintervaller).