02323 Introduktion til statistik

Uge 5: Hypotesetest

Nicolai Siim Larsen
DTU Compute
Danmarks Tekniske Universitet
2800 Kgs. Lyngby

Dagsorden

1. Opsummering
2. Motiverende eksempel – sovemedicin
3. t-test med en stikprøve
4. Kritiske værdier og konfidensintervaller
5. Hypotesetest – generelt
   - Den alternative hypotese (Modhypotesen)
   - Den generelle metode
   - Fejlslutninger ved hypotesetest!
6. Modelkontrol: Normalfordelingsantagelsen
   - Q-Q plot for normalfordelingen
   - Transformation mod normalitet

Dagsorden

1. Opsummering
2. Motiverende eksempel – sovemedicin
3. t-test med en stikprøve
4. Kritiske værdier og konfidensintervaller
5. Hypotesetest – generelt
   - Den alternative hypotese (Modhypotesen)
   - Den generelle metode
   - Fejlslutninger ved hypotesetest!
6. Modelkontrol: Normalfordelingsantagelsen
   - Q-Q plot for normalfordelingen
   - Transformation mod normalitet

De forrige uger

Vi vil undersøge en population ved at udføre et eksperiment og udtage en repræsentativ stikprøve.
Vi definerer en stokastisk variabel $X : S \to \mathbb{R}$, som afbilder eksperimentets udfald til numeriske værdier. Den stokastiske variabel repræsenterer eksperimentets udfaldsværdi før det udføres.

Vi kan så formulere en statistisk model ved at tilknytte den stokastiske variabel en sandsynlighedsfordeling.

Vi vil så betragte en stikprøvefunktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Det kunne eksempelvis være stikprøvegennemsnittet eller stikprøvevariansen.

- Hvis funktionen g bruges til at estimere en ukendt populationsparameter θ, kaldes $g(X_1, \ldots, X_n)$ en estimator for θ og $g(x_1, \ldots, x_n)$ et estimat for θ.
- Hvis funktionen g bruges til hypotesetest, kaldes $g(X_1, \ldots, X_n)$ en teststørrelse og $g(x_1, \ldots, x_n)$ den observerede teststørrelse.

Sidste uge

Sidste uge omhandlede en type intervalestimatorer kaldet konfidensintervaller.

Lad $X = (X_1, \ldots, X_n)$ være en stikprøve med ensfordelte, uafhængige variable. Et γ-konfidensinterval for populationsparameteren θ er givet ved $[u(X), v(X)]$ sådan, at

$$\mathbb{P}\left(u(X) \leq \theta \leq v(X)\right) = \gamma.$$

Her er u og v stikprøvefunktioner, der afhænger af fordelingen for de stokastiske variable.

Sidste uge

Konfidensintervallerne for gennemsnittet/middelværdien (μ) var baseret på hovedresultaterne nedenfor:

Lad $(X_1, \ldots, X_n)$ være en stikprøve med ensfordelte, uafhængige variable.

- Hvis $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, hvor variansen er kendt:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1^2).$$

- Hvis $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, hvor variansen er ukendt og estimeres med S^2:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t(n-1).$$

Sidste uge

Den centrale grænseværdisætning
Lad X følge en vilkårlig fordeling med $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ og $\mathbb{V}[X_i] = \sigma^2$. Hvis n er stor $(n \geq 30)$, så vil både Z og T defineret som

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \quad \text{og} \quad T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}}$$

følge en standardnormalfordeling.

Siden t-fordelingen konvergerer til en standardnormalfordeling for $n \to \infty$, kan man benytte begge fordelinger til at konstruere konfidensintervaller.

I dette kursus baseres konfidensintervaller for middelværdien altid på en t-fordeling, jf. metode 3.9.

Sidste uge

Et $(1-\alpha)$-konfidensinterval for μ fås ved følgende beregninger:
Da $T \sim t(n-1)$ må $\mathbb{P}\left(t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$, hvor t_p er p-fraktilen i en t-fordeling med $n-1$ frihedsgrader. Det gælder endvidere, at

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{1-\alpha/2}\right) &= \mathbb{P}\left(t_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{1-\alpha/2}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}-\mu \leq t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\overline{X}-t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \overline{X}-t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right).\end{aligned}$$

Da t-fordelingen er symmetrisk omkring nul gælder, at $t_p = -t_{1-p}$. Derfor kan dette omskrives til:

$$1-\alpha = \mathbb{P}\left(\overline{X}+t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \geq \mu \geq \overline{X}-t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

Derfor bliver $(1-\alpha)$-konfidensintervallet for μ: $\left[\overline{X}-t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$.

Sidste uge

Et $(1-\alpha)$-konfidensinterval for σ^2, når $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, fås ved følgende beregninger: Lad

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

Så vil Y følge en χ^2-fordeling med $n-1$ frihedsgrader. Derfor gælder, at

$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{\alpha/2} \leq Y \leq \chi^2_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha,$$

hvor χ^2_p er p-fraktilen i en χ^2-fordeling med $n-1$ frihedsgrader. Bemærk så, at

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\chi^2_{\alpha/2} \leq Y \leq \chi^2_{1-\alpha/2}\right) &= \mathbb{P}\left(\chi^2_{\alpha/2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\alpha/2}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}} \geq \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \geq \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \geq \sigma^2 \geq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right)
\end{aligned}$$

Generelt for i dag

For at undersøge en hypotese gør vi følgende:

1. Vi definerer og afgrænser en population
2. Vi formulerer en statistisk model
3. Vi opstiller et eksperiment og udtager en repræsentativ stikprøve
4. Vi beregner en eller flere teststørrelser
5. Vi sammenholder den teoretiske model med de foreliggende observationer

Vi kan så udtale os om hypotesen i forhold til vores antagelser og den foreliggende data.

Vi arbejder efter den videnskabelige metode.

Dagsorden

Eksempel – sovemedicin

Forskel på sovemedicin

I et studie er man interesseret i at sammenligne 2 sovemidler, A og B. For 10 testpersoner har man fået følgende resultater, der er givet i forlænget søvntid i timer (forskellen på effekten af de to midler er angivet):

Stikprøve med $n = 10$:

Person	Forskel
1	1.2
2	2.4
3	1.3
4	1.3
5	0.9
6	1.0
7	1.8
8	0.8
9	4.6
10	1.4

Eksempel – sovemedicin

Forskel på sovemedicin

I et studie er man interesseret i at sammenligne 2 sovemidler, A og B. For 10 testpersoner har man fået følgende resultater, der er givet i forlænget søvntid i timer (forskellen på effekten af de to midler er angivet):

Stikprøve med $n = 10$:

Person	Forskel
1	1.2
2	2.4
3	1.3
4	1.3
5	0.9
6	1.0
7	1.8
8	0.8
9	4.6
10	1.4

$\bar{x} = 1.67$ (gennemsnit)
$s = 1.13$ (standardafvigelse)

Eksempel – sovemedicin

Hypotesen om ingen forskel:

$$H_0: \ \mu = 0$$

hvor μ er den gennemsnitlige forskel i søvnlængde ("effekten").

Eksempel – sovemedicin

Hypotesen om ingen forskel:

$$H_0: \ \mu = 0$$

hvor μ er den gennemsnitlige forskel i søvnlængde ("effekten").

Stikprøvegennemsnit og -standardafvigelse:

$$\bar{x} = 1.670 = \hat{\mu}$$
$$s = 1.13 = \hat{\sigma}$$

Eksempel – sovemedicin

Hypotesen om ingen forskel:

$$H_0: \ \mu = 0$$

hvor μ er den gennemsnitlige forskel i søvnlængde ("effekten").

Stikprøvegennemsnit og -standardafvigelse:

$$\bar{x} = 1.670 = \hat{\mu}$$
$$s = 1.13 = \hat{\sigma}$$

Er data i overensstemmelse med nulhypotesen H_0?

Data: $\bar{x} = 1.67$, $H_0: \ \mu = 0$

NYT: p-**værdi**

$$p = 0.00117$$

(Udregnet under antagelsen, at H_0 er sand).

NYT: **Konklusion**

Vi **forkaster** H_0 og konkluderer, at der er en **signifikant** forskel på effekten af middel B sammenlignet med middel A.

Dagsorden

Metode 3.23: Test med en stikprøve

En t-test med en stikprøve undersøger om populationsmiddelværdien afviger signifikant fra værdien μ_0:

For en (kvantitativ) situation med **én stikprøve**, er p-værdien givet ved:

$$p\text{-værdi} = 2 \cdot P(T > |t_{\text{obs}}|)$$

hvor T følger en t-fordeling med $(n-1)$ frihedsgrader.
Den observerede værdi af teststørrelsen, som skal udregnes, er

$$t_{\text{obs}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}},$$

hvor μ_0 er værdien af μ under nulhypotesen:

$$H_0: \ \mu = \mu_0.$$

Definition og fortolkning af p-værdien (generelt)

p-værdien udtrykker *evidens* mod nulhypotesen – Tabel 3.1:

$p < 0.001$	Meget stærk evidens imod H_0
$0.001 \leq p < 0.01$	Stærk evidens imod H_0
$0.01 \leq p < 0.05$	Nogen evidens imod H_0
$0.05 \leq p < 0.1$	Svag evidens imod H_0
$p \geq 0.1$	Meget svag eller ingen evidens imod H_0

Definition 3.22 af p-værdien:

p-værdien er sandsynligheden for at observere en teststørrelse som er **mindst lige så ekstrem** som den observerede testværdi. Denne sandsynlighed udregnes under antagelse om, at nulhypotesen er sand.

Eksempel – sovemedicin

Hypotesen om ingen forskel:

$$H_0: \ \mu = 0$$

hvor μ er den gennemsnitlige forskel i søvnlængde.

Eksempel – sovemedicin

Hypotesen om ingen forskel:

$$H_0: \; \mu = 0$$

hvor μ er den gennemsnitlige forskel i søvnlængde.

Udregn testværdien:

$$t_{\text{obs}} = \frac{1.67 - 0}{1.13/\sqrt{10}} = 4.67$$

Eksempel – sovemedicin

Hypotesen om ingen forskel:

$$H_0: \ \mu = 0$$

hvor μ er den gennemsnitlige forskel i søvnlængde.

Udregn testværdien:

$$t_{\text{obs}} = \frac{1.67 - 0}{1.13/\sqrt{10}} = 4.67$$

Beregn p-værdien:

$$2P(T > 4.67) = 0.00117$$

```
2 * (1 - pt(4.67, df = 9))
```

Fortolkningen af p-værdien ud fra Tabel 3.1:

Der er stærk evidens imod nulhypotesen.

Eksempel – sovemedicin: Manuelt i R

```
# Indlæs data
x <- c(1.2, 2.4, 1.3, 1.3, 0.9, 1.0, 1.8, 0.8, 4.6, 1.4)
n <- length(x) # Stikprøvestørrelsen (Antal observationer)

# Udregn 'tobs' - den observerede teststørrelse/testværdi
tobs <- (mean(x) - 0) / (sd(x) / sqrt(n))

# Udregn p-værdien
# (med den relevante t-fordeling):
2 * (1 - pt(abs(tobs), df = n-1))

## [1] 0.001166
```

Eksempel – sovemedicin: Automatisk i R

```
t.test(x)

##
##  One Sample t-test
##
## data:  x
## t = 4.7, df = 9, p-value = 0.001
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  0.8613 2.4787
## sample estimates:
## mean of x
##      1.67
```

Definition af hypotesetest og signifikans (generelt)

Definition 3.24: Hypotesetest

Vi siger, at vi *udfører en hypotesetest*, når vi vælger at afvise eller acceptere en nulhypotese ud fra data.

En nulhypotese *afvises* på et α-signifikansniveau, hvis den observerede data giver anledning til en p-værdi mindre end *signifikansniveauet* α, der er valgt på forhånd.

Ellers siges nulhypotesen at være *'accepteret'*. Det er mere korrekt (langt at foretrække) at sige, at nulhypotesen ikke kan afvises.

Definition 3.29: Statistisk signifikans

En *effekt* siges at være *(statistisk) signifikant*, hvis p-værdien er mindre end signifikansniveauet α.

Oftest bruges $\alpha = 0.05$.

Eksempel – sovemedicin

Med $\alpha = 0.05$ kan vi konkludere følgende:

Idet p-værdien er mindre end α, **forkaster** vi nulhypotesen.

Eksempel – sovemedicin

Med $\alpha = 0.05$ kan vi konkludere følgende:

Idet p-værdien er mindre end α, **forkaster** vi nulhypotesen.

Og:

Vi har påvist en **signifikant** forskel på effekten af middel B sammenlignet med middel A. *(Og dermed, at B virker bedre end A)*.

Dagsorden

Kritiske værdier

Man kan også udføre hypotesetest ved brug af kritiske værdier, som er tærskelværdier for observerede teststørrelser.

Definition 3.31 - Kritiske værdier for t-testen:

$(1-\alpha)$ kritiske værdier for den dobbeltsidet t-test med en stikprøve er $(\alpha/2)$- og $(1-\alpha/2)$-fraktilerne i t-fordelingen med $n-1$ frihedsgrader:

$$t_{\alpha/2} \text{ og } t_{1-\alpha/2}.$$

Kritiske værdier

Man kan også udføre hypotesetest ved brug af kritiske værdier, som er tærskelværdier for observerede teststørrelser.

Definition 3.31 - Kritiske værdier for t-testen:

$(1-\alpha)$ kritiske værdier for den dobbeltsidet t-test med en stikprøve er $(\alpha/2)$- og $(1-\alpha/2)$-fraktilerne i t-fordelingen med $n-1$ frihedsgrader:

$$t_{\alpha/2} \text{ og } t_{1-\alpha/2}.$$

Metode 3.32: t-test med en stikprøve ved brug af kritiske værdier

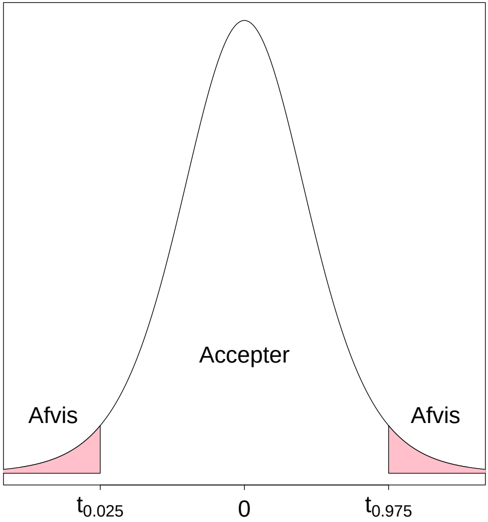
En nulhypotese *afvises* på et α-signifikansniveau, hvis den observerede teststørrelse er mere ekstrem end de kritiske værdier, dvs. hvis

$$t_{\text{obs}} < t_{\alpha/2} \text{ eller } t_{1-\alpha/2} < t_{\text{obs}} \quad (\text{alt. } |t_{\text{obs}}| > t_{1-\alpha/2}).$$

Ellers *accepteres* nulhypotesen (Ellers kan nulhypotesen ikke afvises).

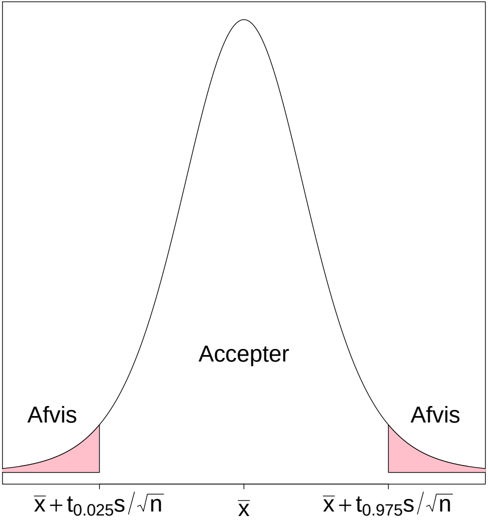
Kritiske værdier og hypotesetest

Acceptområdet består af de værdier af t_{obs}, som ikke er for langt væk fra 0 (standardiseret skala):



Kritiske værdier og hypotesetest

Acceptområdet består af de værdier af μ_0, som ikke er for langt væk fra stikprøvegennemsnittet (oprindelige skala):



Kritiske værdier, konfidensintervaller og hypotesetest

Man kan også udføre hypotesetest med konfidensintervaller.

Sætning 3.33: Konfidensintervaller i hypotesetest

Vi betragter et $(1-\alpha)$-konfidensinterval for μ:

$$\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Konfidensintervallet svarer til acceptområdet for H_0, når man tester hypotesen (imod en dobbeltsiden modhypotese)

$$H_0: \quad \mu = \mu_0.$$

Kritiske værdier, konfidensintervaller og hypotesetest

Man kan også udføre hypotesetest med konfidensintervaller.

Sætning 3.33: Konfidensintervaller i hypotesetest

Vi betragter et $(1-\alpha)$-konfidensinterval for μ:

$$\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Konfidensintervallet svarer til acceptområdet for H_0, når man tester hypotesen (imod en dobbeltsiden modhypotese)

$$H_0: \quad \mu = \mu_0.$$

(Ny) fortolkning af konfidensintervallet:

Konfidensintervallet indeholder de værdier, som vil blive accepteret i hypotesetesten på baggrund af den observerede data.

Bevis:

Bemærkning 3.34

Et μ_0 inden for konfidensintervallet opfylder, at

$$\mu_0 \in \left[\bar{x} - t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right] \Leftrightarrow |\bar{x} - \mu_0| < t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

hvilket er ækvivalent med

$$\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < t_{1-\alpha/2}.$$

Dette er ensbetydende med

$$|t_{\text{obs}}| < t_{1-\alpha/2},$$

hvilket netop siger, at μ_0 accepteres, idet t_{obs} er inden for de kritiske værdier.

Dagsorden

1. Opsummering
2. Motiverende eksempel – sovemedicin
3. t-test med en stikprøve
4. Kritiske værdier og konfidensintervaller
5. Hypotesetest – generelt
   - Den alternative hypotese (Modhypotesen)
   - Den generelle metode
   - Fejlslutninger ved hypotesetest!
6. Modelkontrol: Normalfordelingsantagelsen
   - Q-Q plot for normalfordelingen
   - Transformation mod normalitet

Den alternative hypotese (Modhypotesen)

Indtil nu har det været underforstået, at testen er todsidet (dobbeltsidet): (non-directional)

Alternativet til $H_0: \ \mu = \mu_0$ er $H_1: \ \mu \neq \mu_0$.

Den alternative hypotese (Modhypotesen)

Indtil nu har det været underforstået, at testen er todsidet (dobbeltsidet): (non-directional)

Alternativet til $H_0: \ \mu = \mu_0$ er $H_1: \ \mu \neq \mu_0$.

Der kan være andre situationer, f.eks. ensidet (= directional) modhypoteser:

Alternativet til $H_0: \ \mu = \mu_0$ er $H_1: \ \mu < \mu_0$.

Den alternative hypotese (Modhypotesen)

Indtil nu har det været underforstået, at testen er todsidet (dobbeltsidet): (non-directional)

Alternativet til $H_0: \ \mu = \mu_0$ er $H_1: \ \mu \neq \mu_0$.

Der kan være andre situationer, f.eks. ensidet (= directional) modhypoteser:

Alternativet til $H_0: \ \mu = \mu_0$ er $H_1: \ \mu < \mu_0$.

Vi holder os til den tosidet test (non-directional) i dette kursus!

Trin i en hypotesetest – Et overblik

Helt generelt består en hypotesetest af følgende trin:

1. Formulér nulhypotesen (og modhypotesen) og vælg et signifikansniveau α (vælg "risikoniveauet").
2. Udregn værdien af teststørrelsen ud fra de observerede data.
3. Udregn p-værdien ud fra teststørrelsen holdt op imod den rette fordeling.
4. Sammenlign p-værdien med signifikansniveauet α og konkludér.

Alternativt, konkludér ud fra de relevante kritiske værdier eller det relevante konfidensinterval.

Fejlslutninger ved hypotesetests

Der findes to slags fejl (dog kun én af gangen)

Type I: Afvisning af H_0, når H_0 er sand.
Type II: Ikke afvisning/godkendelse af H_0, når H_1 er sand.

Risikoen for de to typer fejl kaldes sædvanligvis:

$$P(\text{Type I fejl}) = \alpha$$

$$P(\text{Type II fejl}) = \beta$$

Type I fejl kaldes en falsk-positiv, medens en type II fejl kaldes en falsk-negativ. Endvidere kaldes sandsynligheden $1-\beta$ nogle gange teststyrken (power) eller den statistiske følsomhed (sensitivity).

Retssalsanalogi

En person står stillet for en domstol:

En person bliver stillet for en domstol under en specifik anklage.
Nul- og modhypotesen (den alternative hypotese) er:

H_0 : Personen er uskyldig.

H_1 : Personen er skyldig.

Retssalsanalogi

En person står stillet for en domstol:

En person bliver stillet for en domstol under en specifik anklage.
Nul- og modhypotesen (den alternative hypotese) er:

H_0 : Personen er uskyldig.

H_1 : Personen er skyldig.

At man ikke kan bevises skyldig er ikke det samme som, at man er bevist uskyldig:

Sagt på en anden måde:
Accept af en nulhypotese er ikke et statistisk bevis for, at nulhypotesen er sand!

Fejlslutninger ved hypotesetest

Sætning 3.39: Signifikansniveauet er risikoen for at begå en Type I fejl

Signifikansniveauet α i hypotesetests er risikoen for en Type I fejl:

$$P(\text{Type I fejl}) = P(\text{Afvisning of } H_0 \text{ når } H_0 \text{ er sand}) = \alpha$$

Mindre $\alpha =$ større β (og omvendt)

Fejlslutninger ved hypotesetest

Sætning 3.39: Signifikansniveauet er risikoen for at begå en Type I fejl

Signifikansniveauet α i hypotesetests er risikoen for en Type I fejl:

$$P(\text{Type I fejl}) = P(\text{Afvisning of } H_0 \text{ når } H_0 \text{ er sand}) = \alpha$$

To mulige sandheder mod to mulige konklusioner:

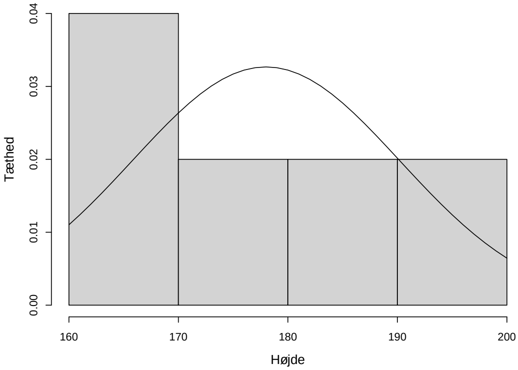
	Afviser H_0	Afviser ikke H_0
H_0 er sand	Type I fejl (α)	Korrekt accept af H_0
H_0 er falsk	Korrekt afvisning af H_0	Type II fejl (β)

$$\text{Mindre } \alpha = \text{ større } \beta \text{ (og omvendt)}$$

Dagsorden

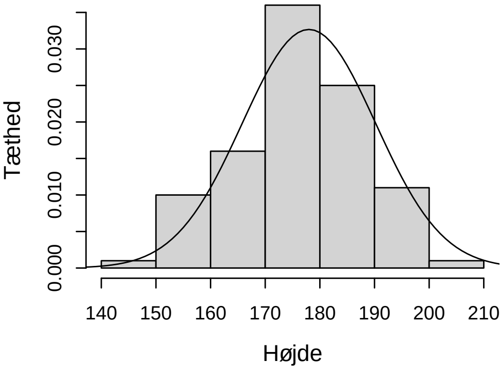
Eksempel – Højde på studerende

```
# Data - Højde målt i cm
x <- c(168, 161, 167, 179, 184, 166, 198, 187, 191, 179)

# Histogram af data sammen med en normal tæthedsfunktion
hist(x, xlab = "Højde", main = "", freq = FALSE,ylab="Tæthed")
lines(seq(160, 200, 1), dnorm(seq(160, 200, 1), mean(x), sd(x)))
```



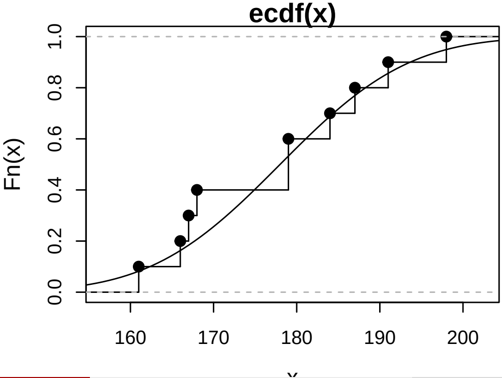
Eksempel – 100 observationer fra en normalfordeling

```r
# Histogram over simuleret data fra en normalfordeling
xr <- rnorm(100, mean(x), sd(x))
hist(xr,xlab="Højde",main="",freq=F,ylab="Tæthed",ylim=c(0, 0.035))
lines(seq(130, 230, 1), dnorm(seq(130, 230, 1), mean(x), sd(x)))
```



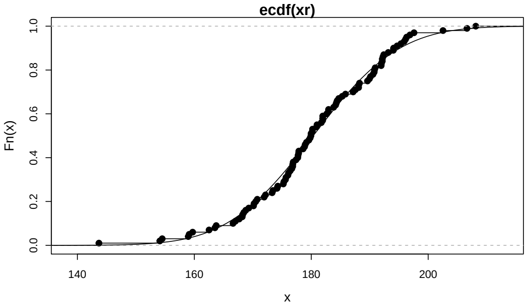
Eksempel – Højde på studerende: ECDF

```
# Empirisk fordelingsfunktion for data
# sammen med en normal fordelingsfunktion
plot(ecdf(x), verticals = TRUE)
xp <- seq(0.9*min(x), 1.1*max(x), length.out = 100)
lines(xp, pnorm(xp, mean(x), sd(x)))
```



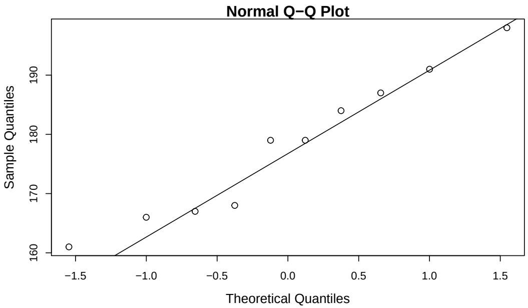
Eksempel – 100 observationer fra en normalford.: ECDF

```
# Empirisk fordelingsfunktion for simuleret normalfordeling
# (n = 100) sammen med en normal fordelingsfunktion
xr <- rnorm(100,  mean(x), sd(x))
plot(ecdf(xr), verticals = TRUE)
xp <- seq(0.9*min(xr), 1.1*max(xr), length.out = 100)
lines(xp, pnorm(xp, mean(xr), sd(xr)))
```



Eksempel – Højde på studerende – Q-Q plot

```r
# Normal Q-Q plot for de studerendes højder
qqnorm(x)
qqline(x)
```



Q-Q plot for normalfordelingen

Metode 3.42 - Formel definition

De sorterede observationer, $x_{(1)},\ldots,x_{(n)}$ plottes mod de teoretiske fraktiler i normalfordelingen. Der findes forskellige definitioner af fraktilerne:

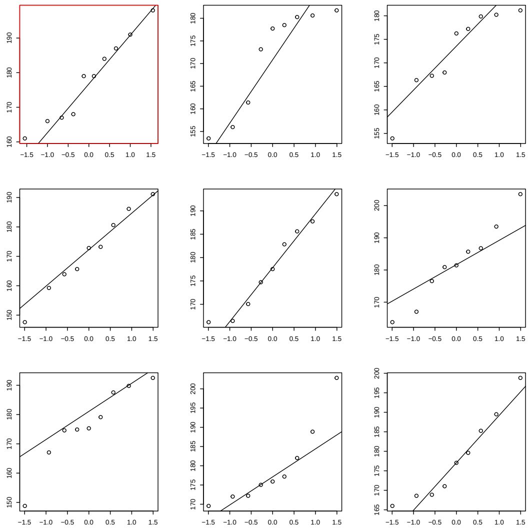
- I R, når $n > 10$:

$$p_i = \frac{i - 0.5}{n},\ i = 1,\ldots,n$$

- I R, når $n \leq 10$:

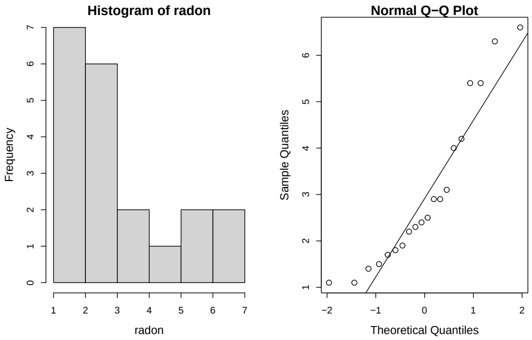
$$p_i = \frac{i - 3/8}{n + 1/4},\ i = 1,\ldots,n$$

Eksempel – Højde på studerende: Sammenligning med simulerede data



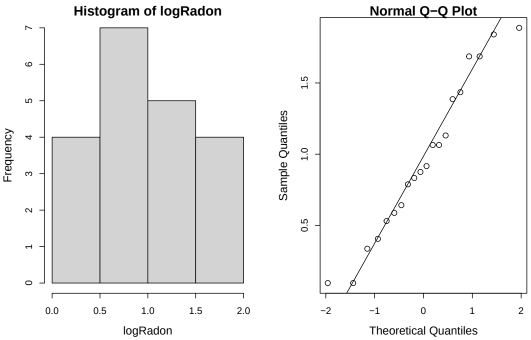
Eksempel – Radon data

```r
## Indlæs data
radon <- c(2.4, 4.2, 1.8, 2.5, 5.4, 2.2, 4.0, 1.1, 1.5, 5.4, 6.3,
        1.9, 1.7, 1.1, 6.6, 3.1, 2.3, 1.4, 2.9, 2.9)

## Histogram og Q-Q plot af data
par(mfrow = c(1,2))
hist(radon)
qqnorm(radon)
qqline(radon)
```



Eksempel – Radon data: Log-transformation

```r
# Log-transformation af data
logRadon<-log(radon)

## Histogram og Q-Q plot af den transformerede data
par(mfrow = c(1,2))
hist(logRadon)
qqnorm(logRadon)
qqline(logRadon)
```



Dagsorden

1. Opsummering
2. Motiverende eksempel – sovemedicin
3. t-test med en stikprøve
4. Kritiske værdier og konfidensintervaller
5. Hypotesetest – generelt
   - Den alternative hypotese (Modhypotesen)
   - Den generelle metode
   - Fejlslutninger ved hypotesetest!
6. Modelkontrol: Normalfordelingsantagelsen
   - Q-Q plot for normalfordelingen
   - Transformation mod normalitet