

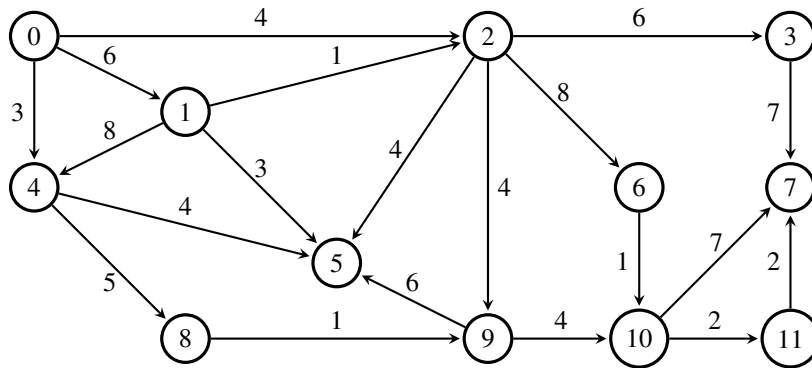
# Ugeseddel: Korteste veje

Eva Rotenberg\*

## Om denne uge

**Materialer** *Introduction to Algorithms* (CLRS): kapitel 24 på nær 24.1 og 24.4.  
*Competitive Programmers Handbook*, Laaksonen (CSES): Kapitel 14.

## Opgaver



Figur 1: Graf til opgaverne

## 1 Algoritmer og egenskaber

- 1.1 Beregn et korteste veje-træ i  $G$  fra figur 1 med startknode 0. Angiv længden af den korteste vej fra 0 til alle knuder.
- 1.2 Giv et eksempel af en graf med negative vægte, men uden negative kredse, hvor Dijkstras algoritme beregner et ukorrekt output (dvs. længder der ikke svarer til korteste veje).
- 1.3 Lad  $G$  være en vægtet graf med  $n$  knuder og  $m$  kanter, og lad  $T$  være et træ i  $G$  som har roden  $s$ . Vis hvordan man kan afgøre i tid  $O(n + m)$  om  $T$  er et korteste veje-træ i  $G$ .
- 1.4 Lad  $T$  være et korteste veje-træ fra en knude  $s$  i en graf  $G$ . Antag vi lægger en konstant  $c$  til alle kantvægte i  $G$ . Er  $T$  stadig et korteste veje-træ?

## 2 Knudevægtet Dijkstra

Lad  $G$  være en rettet graf hvor alle knuderne er tilknyttet en ikke-negativ vægt mens kanterne ikke har nogen vægt. Vægten af en sti i  $G$  er summen af vægtene af knuderne på stien. Giv en algoritme til at beregne korteste vej mellem to knuder i  $G$ .

\*baseret på materiale af Billes&Gørtz

### 3 Kabelrutning (gammel eksamensopgave)

Kabel-tv-firmaet AlgoNet udbyder kabel-tv til alle huse i den lille by AlgoCity. Firmaet sender kabel-tv fra deres hovedstation i byen ud til alle de huse der ønsker det. De har et netværk af kabler de bruger til at sende tv-signal til alle kunderne i byen. Kablerne går mellem nogle bokse. Der er en boks i alle de huse der modtager kabel-tv (dvs. hos alle kunderne), og ingen bokse andre steder. Der kan godt være mange kabler tilsluttet samme boks, så der kan sendes signal både ud og ind af en boks. Der er  $X$  huse og  $K$  kabler i netværket. Firmaet kender også den præcise længde af hvert kabel.

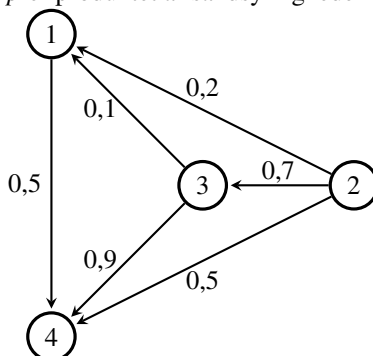
- 3.1 Firmaet ønsker at finde ud af hvad vej de skal sende signalerne fra hovedstationen til de huse der ønsker kabel-tv. Der skal være så lidt forringelse af signalet som muligt, så derfor ønsker de at hver kunde skal modtage signalet af så kort en rute som muligt (længden af en rute er den samlede længde af kablerne på ruten). Giv en algoritme der finder den bedste måde at rute signalerne på, så hver kundes signal er så godt som muligt.
- 3.2 Firmaet har fundet ud af at der også sker en forringelse af signalet når det går gennem en boks. Forringelsen af signalet når det går gennem en boks svarer til den forringelse der sker når det løber gennem 5 meter kabel. Giv en algoritme der finder den bedste måde at rute signalerne på, så hver kundes signal er så godt som muligt.
- 3.3 Firmaet skal spare og ønsker derfor ikke længere at vedligeholde hele kabelnettet. De vil derfor gerne finde en mængde af kabler der er billigst mulig at vedligeholde, men som samtidig forbinder alle nuværende kunder. Prisen for at vedligeholde et kabel er proportional med længden af kablet, dvs. det er den samlede længde af kablerne der afgør hvor dyrt det er at vedligeholde dem. Giv en algoritme der finder den billigste mængde af kabler at vedligeholde.

### 4 Længste veje i en acyklisk rettet graf (DAG)

Giv en algoritme til at finde den længste vej i en acyklisk rettet graf.

### 5 [\*] Sikreste rute

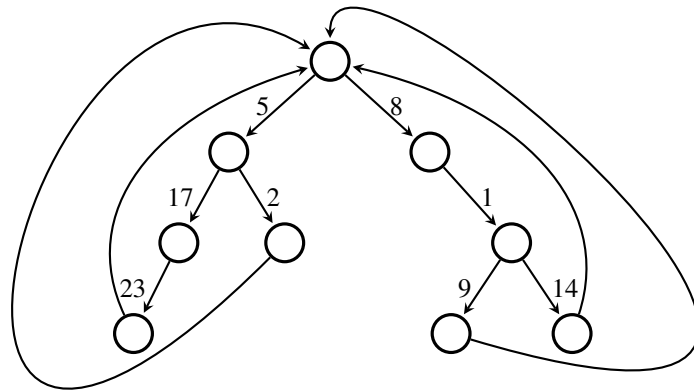
Du har du brug for at finde den sikreste rute til at sende data mellem to computere så at dataene undgår at gå tabt i netværket. Du er givet en graf  $G$  hvor hver knude repræsenterer en computer og hver kant en rute mellem to computere. Hver kant  $e$  har en *sandsynlighed*  $s(e)$ ,  $0 \leq s(e) \leq 1$ , for at data ikke går tabt på ruten mellem de pågældende computere. Sandsynlighederne på kanterne er uafhængige og sandsynligheden for at data overlever en tur langs en vej  $p$  er produktet af sandsynlighederne af kanterne i  $p$ .



Som eksempel, kig på ovenstående graf. Hvis data sendes direkte fra knude 2 til 4, er der 50% chance for at de nå frem. Hvis de derimod sendes over knude 3, er der  $0,7 \cdot 0,9 = 63\%$  chance for modtagelsen. Sendes data via 3 og 1, er der kun  $0,7 \cdot 0,1 \cdot 0,5 = 3,5\%$  chance for modtagelsen. Giv en algoritme der finder den sikreste rute fra en knude  $s$  til en anden knude  $t$ .

## 6 Løkkelige træer

Et løkkeligt træ er en vægtet rettet graf bygget fra et binært træ ved at tilføje en kant fra hvert blad tilbage til roden. Alle kanter har ikke-negative vægte.



6.1 Hvor lang tid bruger Dijkstras algoritme, implementeret med en hob som prioritetskø, på at beregne korteste veje fra en knude  $s$  i et løkkeligt træ?

6.2 \* Giv en hurtigere algoritme.

## 7 † Implementation af Dijkstras algoritme

Implementér Dijkstras algoritme på en sammenhængende, vægtet og urettet graf givet i incidenslisterepræsentationen. Input til dit program skal være grafen og output skal være en liste af korteste afstande fra startknuden til alle knuder.