

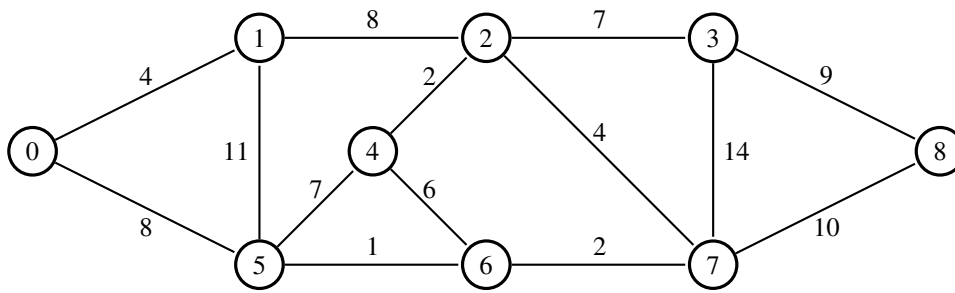
# Mindste udspændende træ

Eva Rotenberg\*

## Om denne uge

**Materialer** *Introduction to Algorithms*, Cormen, Leiserson, Rivest og Stein (CLRS): kap. 23.

## Opgaver



Figur 1: Graf til opgaverne

## 1 Algoritmer og egenskaber

Kig på grafen  $G$  i figur 1.

- 1.1 Håndkør Kruskals algoritme på  $G$ .
- 1.2 Håndkør Prims algoritme på  $G$  startende fra knude 0. Vis indhold af prioritetskø under kørslen.
- 1.3 Angiv alle mindste udspændende træer af  $G$ .
- 1.4 Giv en algoritme til at finde et udspændende træ.

Husk hvad "giv en algoritme" betyder (se evt kursushjemmesiden under oftest stillede spørgsmål).

## 2 Fiber Optic Cables [†] Se CodeJudge.

## 3 Omvendt sletning

Overvej følgende algoritme til at beregne et mindste udspændende træ. Start med en vægtet, sammenhængende graf  $G$ . Kig på kanter i  $G$  i rækkefølge fra tungeste til letteste kant. For hver kant undersøg om fjernelse af kanten gør grafen usammenhængende. Hvis den gør, lader vi kanten blive og ellers fjerner vi den fra  $G$ .

- 3.1 Håndkør algoritmen på grafen i figur 1.
- 3.2 Argumentér for at algoritmen beregner et mindste udspændende træ af  $G$ .

\*baseret på materiale af Billes&Gørtz

#### 4 Egenskaber for mindste udspændende træ

Lad  $G$  være en vægtet graf.

- 4.1 Vis at en letteste kant i en graf  $G$  er del af et mindste udspændende træ for  $G$ . Hvad kan du sige om en tungeste kant?
- 4.2 Antag vi skalerer alle kantvægte i  $G$  ved at gange dem med en værdi  $c > 0$ . Hvordan ser mindste udspændende træud i den nye graf?
- 4.3 Vis at hvis alle kantvægte i  $G$  er distinkte, så er det mindste udspændende træ unikt. Hint: husk egenskaberne for et mindste udspændende træ.
- 4.4 Kruskals algoritme kan returnere forskellige udspændende træer på den samme inputgraf  $G$  alt efter hvilken kant, den vælger, når flere kanter har samme vægt. Vis at for ethvert mindste udspændende træ  $T$  af  $G$ , er det muligt at sortere kanterne i  $G$ , således at Kruskals algoritme returnerer  $T$ .

#### 5 Største udspændende træ

Givet en vægtet graf  $G$ , giv en algoritme til at beregne et største udspændende træ af  $G$ , dvs. et udspændende træ af maksimal total vægt. Hint: transformér problemet.

#### 6 Mindste udspændende træ i grafer med generelle vægte

- 6.1 Vis at snit- og kredsegenskaber gælder på grafer, hvor kantvægte ikke behøver at være distinkte (egenskaberne skal omformuleres passende).
- 6.2 Konkluder at Prims og Kruskals algoritme også virker i dette tilfælde.

#### 7 [\*] Mindste udspændende træ i grafer med begrænsede kantvægte

Lad  $G$  være en vægtet graf med  $n$  knuder og  $m$  kanter således at alle kantvægtene er værdier fra  $\{1, 2, \dots, 10\}$ . Giv en effektiv algoritme til at beregne et mindste udspændende træ.

#### 8 † Implementation af Kruskals algoritme

Implementer Kruskals algoritme på en sammenhængende, vægtet og uorienteret graf givet i incidensliste-repræsentationen. Input til dit program skal være grafen og output skal være den samlede vægt af et mindste udspændende træ.