

# Rettede grafer

Eva Rotenberg\*

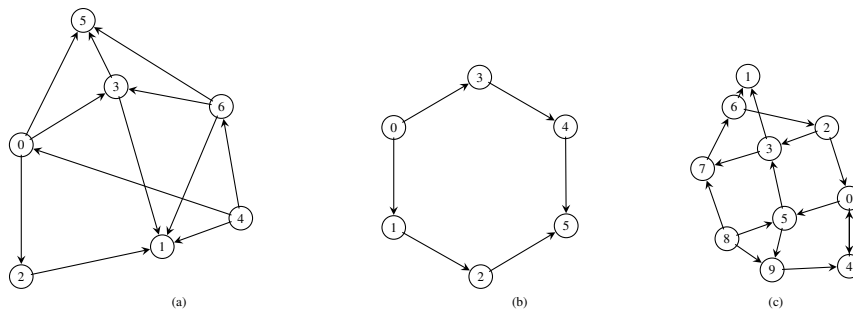
## Om denne uge

**Materialer** CLRS: introduktion til del VI + kap. 22.1–22.4 + appendix B.4–B.5.

## Opgaver

### 1 Repræsentation, egenskaber og algoritmer

Kig på følgende grafer og løs nedenstående opgaver.



- 1.1 Vis incidenslister og incidensmatricer for (a) og (b). Du må antage at incidenslisterne er sorterede.
- 1.2 Håndkør dybdesøgning eller breddesøgning fra knude 4 i (a) og knude 5 i (c).
- 1.3 Hvilke af (a) og (c) er acykliske rettede grafer? Hvis grafen er acyklisk, så find en topologisk sortering med den rekursive algoritme til topologisk sortering. Hvis grafen ikke er en acyklisk, så angiv en kreds.
- 1.4 Angiv de stærkt sammenhængende komponenter i (a) og (c).
- 1.5 Hvor mange topologiske sorteringer har (b)?
- 1.6 Hvor mange stærkt sammenhængende komponenter er der i en acyklisk rettet graf?

### 2 Slanger og stiger

Slanger og stiger (snakes and ladders) er et klassisk brætspil. Vi kigger på følgende variant. Spillet foregår på et  $n \times n$  gitter, med felter nummeret fortløbende fra 1 til  $n^2$ . Se figur på næste side. Særlige par af felter er slanger, der fører nedad, og stiger, der fører op. Fra hvert felt kan der højst starte eller slutte en stige/slange.

---

\*baseret på materiale af Bille&Gørtz

21	22	23	24	25
20	19	18	17	16
11	12	13	14	15
10	9	8	7	6
1	2	3	4	5

Målet med spillet er at komme fra det første felt til det sidste med færrest mulige skridt. Man starter med at placere sin brik i felt 1. I hvert skridt kan man flytte sin brik højst 5 felter frem (i numerisk rækkefølge). Hvis en brik ender i toppen af en slange flytter den til bunden af slangen og tilsvarende hvis en brik ender i bunden af en stige flytter den til toppen af stigen.

1. Giv en algoritme til at beregne det mindste antal skridt det kræver for at flytte en brik fra det første felt til det sidste felt.

Husk hvad vi mener med "giv en algoritme": effektiv algoritme, koncist beskrevet, korrekthed, køretid.

### 3 Acykliske grafer og topologisk sortering

- 3.1 Josefines lillesøster foreslår følgende nye og simple algoritme til at konstruere en topologisk sortering: Kør breddesøgning fra en knude  $s$  med indgrad 0 og sorter knuderne efter stigende afstand fra  $s$ . Virker algoritmen? (Giv et argument for, at den virker, eller et eksempel, hvor den ikke virker.)
- 3.2 Giv en algoritme, der givet en graf  $G$  og en sortering  $S$  af knuder i  $G$  afgør, om  $S$  er en topologisk sortering.
- 3.3 Givet en acyklisk rettet graf  $G$ , findes der en topologisk sortering af  $G$  der ikke kan fremkomme som resultat af den rekursive algoritme til topologisk sortering?
- 3.4 \* En Hamilton-sti er en sti, der besøger alle knuder netop en gang. Giv en algoritme til at afgøre om en acyklisk rettet graf har en Hamilton-sti.

### 4 [†] Kursusplanlægning

Hjælp Josefine med at planlægge sine studier. Hun har fundet ud af, hvilke kurser, der er forudsætning for hvilke andre kurser. Men hvordan kan hun bruge den information til at lægge en plan for sine studier, så hun undgår at tage et kursus hun mangler forudsætningerne for? Opgaven findes i CodeJudge.

### 5 [\*] Etnografer<sup>1</sup>

Du skal hjælpe nogle etnografer med at analysere noget mundtligt historiedata, de har samlet ved at interviewe medlemmer af en landsby, for at lære om livet i området gennem de sidste 200 år. Du har gennem interviewene fået kendskab til en mængde afdøde personer,  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Etnograferne har samlet forskellige fakta om disse personers liv. Specifikt, for ethvert par af personer  $(P_i, P_j)$  ved etnograferne en af følgende fakta:

- (a)  $P_i$  døde før  $P_j$  blev født.
- (b)  $P_i$  og  $P_j$  var begge i live på samme tidspunkt.

<sup>1</sup>Oversat fra *Algorithm Design*, Jon Kleinberg og Eva Tardos

Naturligvis er etnograferne ikke sikre på at deres fakta er korrekte; hukommelse kan fejle og al information er blevet mundtligt overbragt. Derfor vil de gerne afgøre om det data de har samlet er konsistent, i den forstand at der kunne have eksisteret personer således at alle faktaerne om dem holder. Giv en algoritme til at løse etnografernes problem. Din algoritme skal enten give en konsistent sekvens af fødsler og dødsfald eller rapportere at der ikke findes nogen.

## 6 Tre dunke

Du er givet tre dunke med plads til henholdsvis 8, 5 og 3 liter. Dunken på 8 liter er fyldt med vand og de to andre er tomme. Dit mål er at få præcis 4 liter i en af dunkene ved at fylde en dunk helt op eller ved at tømme en dunk over i en anden. Løs følgende opgaver:

- 6.1 [\*] Vis at det kan lade sig gøre og giv den korteste sekvens af tømninger og fyldninger du kan finde.
- 6.2 [\*] Antag nu at du har  $n$  dunke med plads til  $d_1, \dots, d_n$  liter hver og et mål på  $x$  liter du skal have i en dunk. Giv en algoritme til at beregne den korteste sekvens af tømning og fyldninger. Hint: modellér problemet som en implicit graf.

## Ekstra implementationsopgaver

### 7 [†] Implementation af bredde- og dybdesøgning

Lad  $G$  være en graf givet i incidenslisterepræsentationen.

#### 7.1 Implementér breddeførstsøgning.

Lav en metode, tager en startknode  $s$  og en slutknode  $t$ , og returnerer længden af den korteste sti mellem dem.

#### 7.2 Implementér dybdeførstsøgning.

Givet en startknode, skriv start- og sluttider for de andre knuder i grafen.

Når der er flere mulige naboer at vælge mellem, så vælg naboen med det laveste nummer.