Introduktion til grafer

Eva Rotenberg*

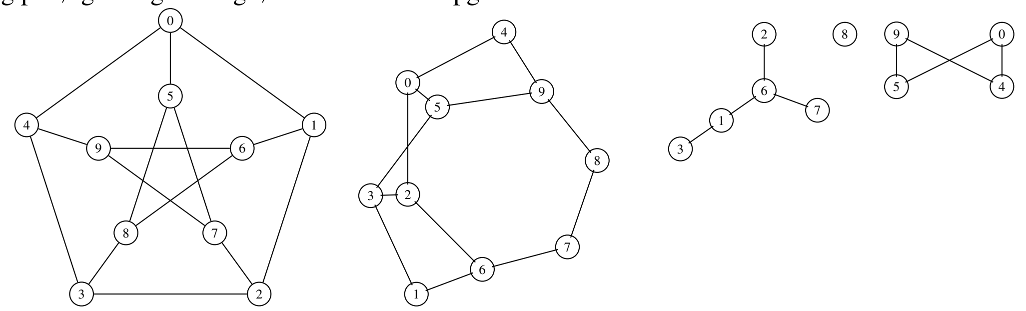
Om denne uge

Materialer Introduction to Algorithms introduktion til del VI + kap. 22.1-22.4 + appendix B.4-B.5.

Opgaver

1 Repræsentation, egenskaber og algoritmer

Kig på følgende grafer og løs nedenstående opgaver.



(a) (b) (c)

1.1 Vis incidenslister og incidensmatricer for (a) og (c).

1.2 Håndkør DFS på (a) med udgangspunkt i knude 0. Antag incidenslisterne er sorterede. Angiv DFS-træ og start- og sluttider.

1.3 Håndkør BFS på (a) med udgangspunkt i knude 0. Antag incidenslisterne er sorterede. Angiv BFS-træ og afstand for hver knude.

1.4 Angiv sammenhængskomponenterne i (a), (b) og (c).

1.5 Hvilke af (a), (b) og (c) er todelte?

2 Bogstavslabyrint

Josefine og hendes lillesøster Esmaralda spiller et sjovt spil, der hedder Bogstavslabyrint. I spillet er man givet en $N \times N$ matrix med A'er og B'er, og skal finde en vej fra øverste venstre til nederste højre hjørne, der veksler mellem A og B: "ABABA...". Vejen må gå op, ned, til begge sider, men ikke på skrå. I eksemplet nedenfor er den korteste vej markeret med fed:

AA**ABA**
BB**B**B**B**
ABAAA
ABBB**B**
AAAA**A**

Hjælp Josefine og Esmaralda med at finde korteste veje i bogstavslabyrinten, ved at skrive et program, der finder den korteste vej. Opgaven er på CodeJudge.

*baseret på materiale af Bille&Gørtz

3 Dybdeførst søgning med stak

Forklar hvordan man kan implementere DFS uden brug af rekursion. Hint: benyt i stedet en (eksplicit) stak.

4 Find en kreds

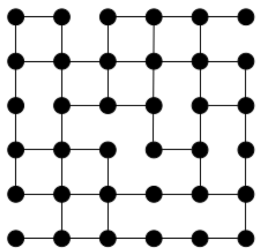
Giv en algoritme, der afgør, om en urettet graf er cyclisk, dvs. indeholder en kreds.
Hvor hurtigt kører din algoritme?

5 Antal af korteste veje

[$*$] Giv en algoritme der givet to knuder s og t i G, returnerer antallet af korteste veje i G mellem s og t.
Hvor hurtigt kører din algoritme?

6 Labyrint (gammel eksamensopgave)

En $k \times k$ gittergraf er en graf hvor knuderne er arrangeret i k rækker hver indeholdende k knuder. Kanterne i en gittergraf kan kun gå mellem knuder der er lige til højre eller venstre for hinanden eller lige ovenover hinanden (der behøver ikke at være kanter mellem alle knuder der er over eller ved siden af hinanden). Nedenstående figur viser en 6×6 gittergraf.



Løs følgende opgaver:

6.1 Lad n og m betegne henholdvis antallet af knuder og kanter i en $k \times k$ gittergraf. Udtryk n som en funktion af k.

6.2 Hvor stor kan m maksimalt være (sæt kun ét kryds)?

□ $O(\sqrt{n})$ □ $O(n)$ □ $O(n \log n)$ □ $O(n^2)$

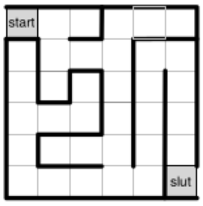
Vi kigger på såkaldte labyrinter med decideret startfelt og slutfelt og siger at en labyrint er korrekt konstrueret hvis

a) der er netop én vej fra start til slut,

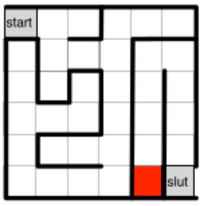
b) ethvert sted i labyrinten kan nås fra start, og

c) der ikke er nogle kredse i labyrinten

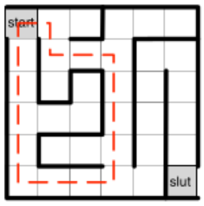
Nedenfor er 3 eksempler på labyrinter. Start og slutfelterne er markeret med grå. Labyrint 1 er korrekt konstrueret. Labyrint 2 er ikke korrekt konstrueret, da der ikke er nogen vej fra start til slut og nogle steder/felter ikke kan nås fra start (f.eks. kan det røde felt ikke nås). Labyrint 3 er ikke korrekt konstrueret, da der er en kreds.



Labyrint 1



Labyrint 2



Labyrint 3

Vi siger at labyrinten er tegnet i et $k \times k$ gitter hvis der er k rækker af felter med hver k felter i. Alle ovenstående labyrinter er tegnet i et 6x6 gitter.

6.3 Beskriv hvordan en labyrint tegnet i et $k \times k$ gitter kan modelleres som en $k \times k$ gittergraf.

6.4 Tegn Labyrint 1 som en gittergraf.

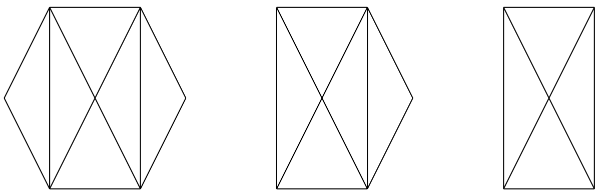
6.5 Giv en algoritme der, givet en labyrint modelleret som en $k \times k$ gittergraf, afgør om labyrinten er korrekt konstrueret. Argumenter for korrekthed og analyser køretiden som funktion af k.

7 'Can you walk this?' – Eulerture og Eulerstier

Lad G være en sammenhængede graf med n knuder og m kanter. En Eulertur i G er en cyklisk vandring, der indeholder alle kanter i G netop en gang. En Eulersti i G er en vandring, der indeholder alle kanter i G netop en gang.

Løs følgende opgaver:

7.1 Hvilke af nedenstående tegninger kan du lave uden at løfte blyanten? Kan du starte og slutte samme sted?



7.2 [$*$] Vis at G har en Eulertur hvis og kun hvis alle knuder har lige grad.

7.3 [$*$] Vis at G har en Eulersti hvis og kun hvis højst to knuder har ulige grad.

7.4 Giv en $O(n + m)$ algoritme til at afgøre om G, givet i incidenslistereræsentation, har en Eulertur.

7.5 [$*$] Giv en $O(n + m)$ algoritme til at finde en Eulertur i G, hvis den findes.

8 Diameter af træ

Vi definerer diameteren af en uorienteret graf G som længste korteste vej over alle par af knuder i G. Lad T være et træ med n knuder. Løs følgende opgaver:

1. Giv en algoritme til at beregne diameteren af T i $O(n^2)$ tid.

2. [$*$] Giv en algoritme til at beregne diameteren af T i $O(n)$ tid.

Hint: et træ med n knuder har $n - 1$ kanter.

9 Implementation af grafer

Vi er interesseret i at understøtte følgende operationer på en dynamisk graf G.

- ADDEDGE(u, v): tilføj en kant mellem knude u og v.
- ADJACENT(u, v): afgør om knude u og v er naboer.
- NEIGHBORS(v): udskriv alle naboer af knude v.

Løs følgende opgaver:

9.1 Giv algoritmer til at understøtte operationerne på incidensmatrix. Analysér køretiden.

9.2 Giv algoritmer til at understøtte operationerne på incidensliste. Analysér køretiden.

9.3 † Implementér operationerne på en incidensmatrix.

9.4 † Implementér operationerne på en incidensliste.