

Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve, den 23. maj 2011.

Kursusnavn: Algoritmer og datastrukturer I

Kursus nr. 02105.

Varighed: 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Alle skriftlige hjælpemidler.

Vægtning af opgaverne: Opgave 1 - 24%, Opgave 2 - 16%, Opgave 3 - 20%, Opgave 4 - 20%, Opgave 5 - 20 %.

Vægtningen er kun en cirka vægtning.

Alle opgaver besvares ved at udfylde de indrettede felter nedenfor. Som opgavebesvarelse afleveres blot denne og de efterfølgende sider i udfyldt stand. Hvis der opstår pladsmangel kan man eventuelt benyttes ekstra papir som så vedlægges opgavebesvarelsen.

Opgave 1 (kompleksitet)

1.1 Angiv for hver af nedenstående udsagn om de er korrekte:

	Ja	Nej
$\frac{1}{20}n^4 - 100n^3 = O(n^3)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\log n)^2 = O(n)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\frac{1}{2}n^5 = \Omega(n^6)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$2^n = O(3^n)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$n^4(n-1)/5 = \Theta(n^5)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

1.2 Skriv følgende liste af funktioner op i voksende rækkefølge efter asymptotisk vækst. Dvs. hvis funktionen $g(n)$ følger umiddelbart efter funktionen $f(n)$ i din liste, så skal der gælde at $f(n) = O(g(n))$.

$$5000(\log n)^2$$

$$4n$$

$$\frac{1}{4}n^2 - 10000n$$

$$n^{1/100}$$

$$4n \log n$$

Svar: _____

1.3 Antag at du har en algoritme hvis køretid er præcist $2n^3$. Hvor meget langsommere kører algoritmen hvis du fordbobler inputstørrelsen?

- A dobbelt så langsom
 B 3 gange langsommere
 C 4 gange langsommere
 D 8 gange langsommere
 E 16 gange langsommere

1.4 Betragt nedenstående algoritme.

Algorithm 1 Løkke1(n)

```

1: for  $i = 1$  to  $n$  do
2:   for  $j = 1$  to  $n + 1 - i$  do
3:     print  $i + j$ 
4:   end for
5: end for

```

Køretiden af algoritmen er

- A $\Theta(\log n)$
 B $\Theta(n)$
 C $\Theta(n \log n)$
 D $\Theta(n^2 \log n)$
 E $\Theta(n^3)$
 F $\Theta(n^2)$
 G $\Theta(2^n)$
 H $\Theta(n^4)$
 I $\Theta(\sqrt{n})$

1.5 Betragt nedenstående algoritme.

Algorithm 2 Løkke2(n)

```

1:  $i = 1$ 
2: while ( $i < n$ ) do
3:   for  $j = 1$  to  $n$  do
4:      $i = i + 1$ 
5:   end for
6:    $i = 2 \cdot i$ 
7: end while

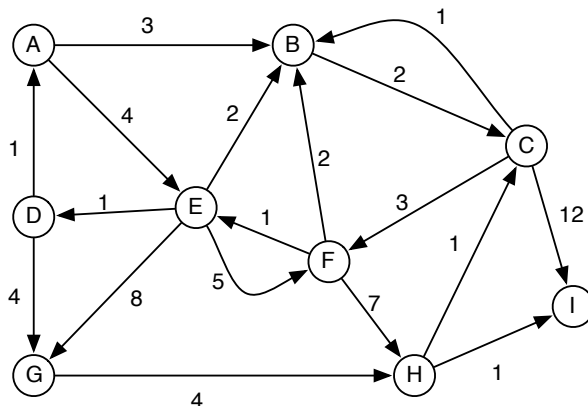
```

Køretiden af algoritmen er

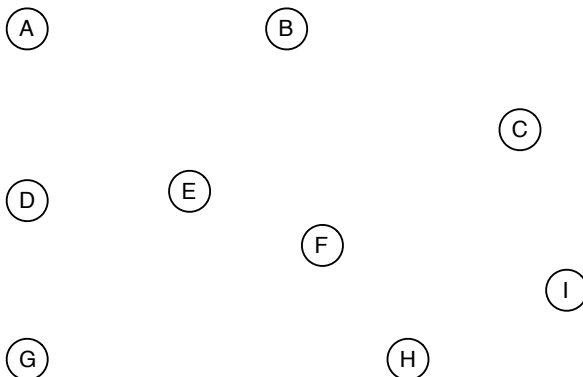
- A $\Theta(\log n)$
 B $\Theta(n)$
 C $\Theta(n \log n)$
 D $\Theta(n^2 \log n)$
 E $\Theta(n^3)$
 F $\Theta(n^2)$
 G $\Theta(2^n)$
 H $\Theta(n^4)$
 I $\Theta(\sqrt{n})$

Opgave 2 (grafer)

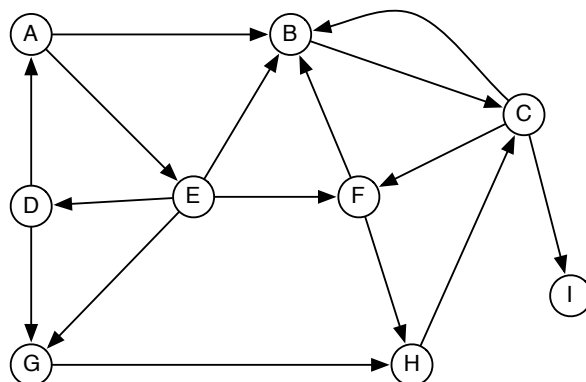
2.1 Angiv et korteste veje træ for nedenstående graf når korteste veje beregningen sker med hensyn til startknuden A. Angiv for hver knude afstanden fra knuden A.



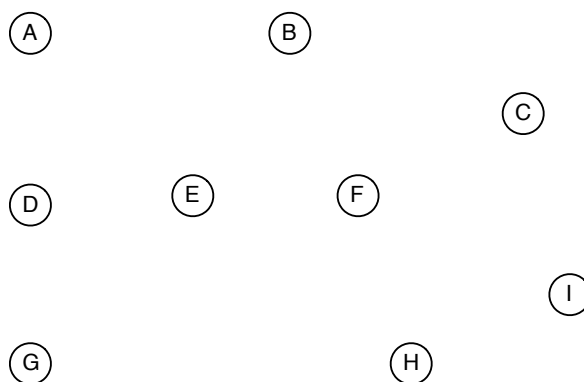
Angiv korteste veje træet og afstandene her:



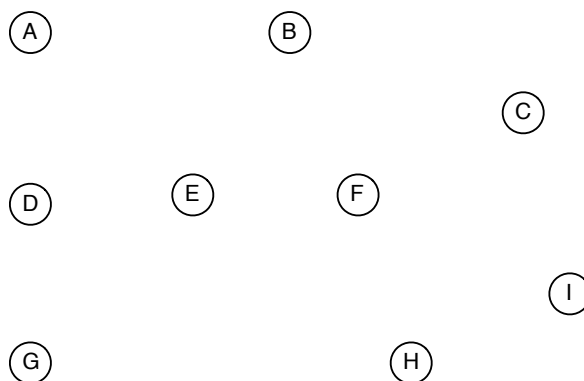
2.2 Betragt nedenstående graf G .



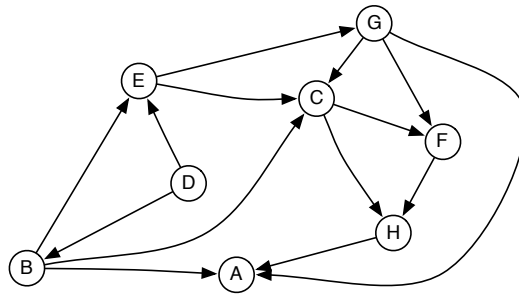
a) Angiv et BFS træ for grafen G når BFS gennemløbet starter i knuden A . Angiv BFS-dybde/lag for hver knude. Det antages at incidenslisterne er sorteret i alfabetisk orden.



b) Angiv et DFS træ for grafen G , når DFS gennemløbet starter i knuden A . Angiv en DFS nummerering af knuderne (en DFS nummerering er den rækkefølge knuder bliver besøgt i). Det antages at incidenslisterne er sorteret i alfabetisk orden.



2.3 Angiv en topologisk sortering af knuderne i nedenstående graf.



Opgave 3 (modellering og anvendelse af algoritmer/datastrukturer)

I det lille land Algostan har man besluttet, at lave et registersystem. I første version af systemet skal registret kun kunne håndtere følgende tre operationer:

- $\text{INIT}(n)$: Initialiser registret, så det kan håndtere et maksimum på n personer i registret.
- $\text{INDSÆT}(CPR, \text{indkomst})$: Indsæt en person med cpr-nummer CPR i registret. Til personen skal der tilknyttes en oplysning om årlig indkomst indkomst i kr. Det antages, at registret ikke allerede indeholder en person med cpr-nummer CPR i forvejen.
- $\text{SLETLAVESTEINDKOMST}()$: Returner cpr-nummeret for en person, der har den laveste indkomst, samt slet denne person fra registret.

3.1 Beskriv hvordan første version af registret kan laves, så $\text{INIT}(n)$ tager tid $O(n)$, og de to andre operationer tager tid $O(\log n)$, hvor n er det maksimale antal personer der kan være i registret. Husk at begrunde dit svar og at argumentere for køretiderne.

Anden version af registret skal ud over ovenstående operationer også understøtte følgende operation:

- **FINDALLEUNDER(k)**: Udskriv personnumrene på alle personer der tjener mindre end k kr om året.

3.2 Beskriv hvordan anden version af registret kan laves, så **FINDALLEUNDER(k)** tager $O(n_k)$ tid, hvor n_k er antal personer i registret der tjener mindre end k kr om året. Procedurene **INIT**, **INDSÆT** og **SLET-LAVESTEINDKOMST** skal have samme køretid som i opgave 3.1. Argumenter for at din procedure er korrekt og angiv køretiden for proceduren.

Hvis du ikke kan få køretiden ned på $O(n_k)$, så angiv den bedst mulige implementation af proceduren (i tekst eller pseudokode), som du kan finde på (husk stadig argumentation for korrekthed og køretid).

Opgave 4 (Træer og rekursion)

Denne opgave handler om rekursion og rodfæstede binære træer. Hver knude har *enten to eller ingen* børn. Knuden x 's venstre barn betegnes $left[x]$, og dens højre barn betegnes $right[x]$. Hvis knuden x ikke har nogle børn, har $left[x]$ og $right[x]$ den specielle NIL værdi. Hvis knude x ikke har nogle børn, kaldes den et blad. Ellers kaldes den en intern knude. Såfremt rodknuden for et træ er NIL, er træet tomt. Hver knude i træet har et felt $size[x]$, der indeholder et heltal.

Betragt følgende algoritme:

Algorithm 3 ZERO(x)

```

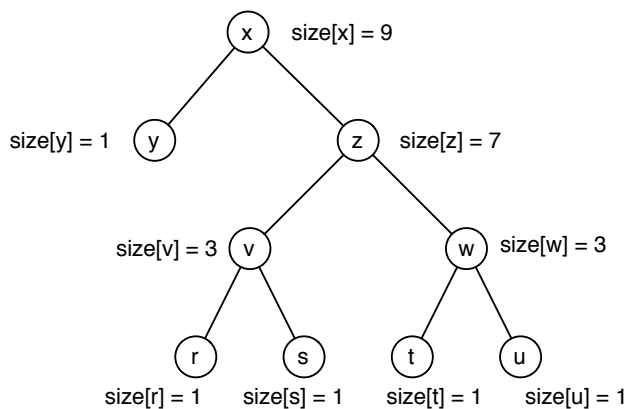
1: if ( $x \neq \text{NIL}$ ) then
2:    $size[x] = 0$ 
3:   ZERO( $left[x]$ )
4:   ZERO( $right[x]$ )
5: end if

```

Lad x være rodknuden for træet T . Efter udørelsen af proceduren ZERO(x) vil alle felterne $size[x]$ være 0.

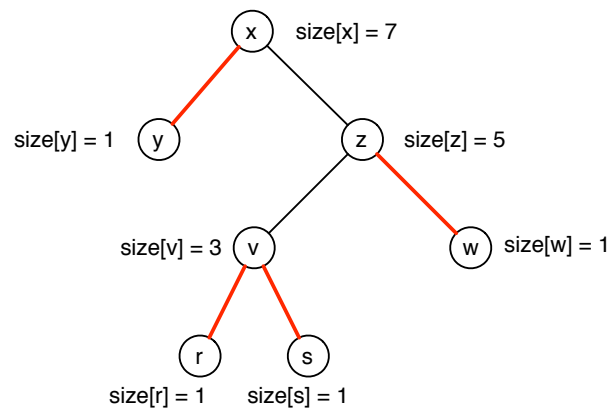
4.1 Angiv køretiden af proceduren ZERO(x) i O -notation, hvor x er roden i et træ med n knuder. Begrund dit svar.

4.2 I de følgende opgaver betegner $T(x)$ undertræet med rod x i T . Proceduren INITSIZE(x), skal givet roden x i et træ T med n knuder initialisere felterne $size[y]$ for alle knuder y i T , så $size[y]$ bliver lig med antallet af knuder i $T(y)$. Se eksemplet nedenfor.



Giv pseudokode for $\text{INITSIZE}(x)$, så køretiden er $O(n)$. Argumenter for køretiden af din algoritme, samt for at den er korrekt.

For et træ T siger vi at en kant (u, v) , hvor u er forælder til v , er *rød*, hvis antallet af knuder i undertræet $T(u)$ er mindst dobbelt så stort som antallet af knuder i $T(v)$. Dvs. efter udførelse af INITSIZE gælder $\text{size}[u] \geq 2\text{size}[v]$ for alle *røde* kanter (u, v) i T . Se eksempel nedenfor.



4.3 Konstruer en rekursiv algoritme $RØDKANT(x)$ der givet en rodnode x for et træ returnerer antallet af *røde* kanter i træet. Argumenter for at din algoritme er korrekt. Angiv tidskompleksiteten/køretiden af din løsning i O -notation. Begrund dit svar.

4.4 Angiv i O -notation en øvre grænse for antallet af røde kanter, der kan være på stien fra en knude til roden i et træ T . Begrund dit svar.

Opgave 5 (datastrukturer)

5.1 Lad S være en stak. Udfør følgende operationer fra venstre til højre: et bogstav i betyder $Push(S, i)$ og $*$ betyder $Pop(S)$.

D * T U * * I N * F O R * M * A T I K

Angiv sekvensen af bogstaver der bliver "pop"’et (returneret af $Pop(S)$) af disse operationer:

A D U T I R M

B D U T N R M K I T A O F

C D U T N R M

D D T U I N F

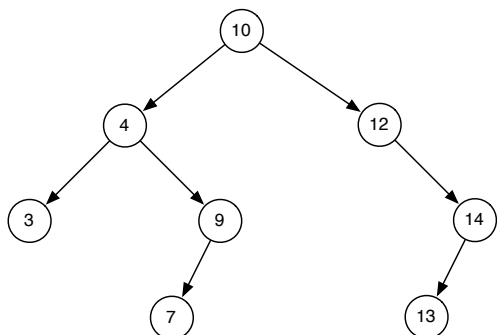
E D U T N R M I T A O F

F D U T N O M

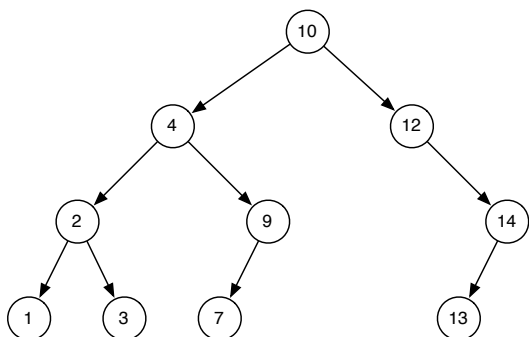
5.2 Lad H være en kædet hashtabel (chained hashing) af størrelse 7 med hashfunktion $h(x) = 3x \bmod 7$. Angiv hvordan hashtabellen H ser ud efter indsættelse af tallene 4, 1, 12, 8, 10, 11.

5.3 Denne opgave omhandler (ubalancerede) binære søgetræer, som beskrevet i de udleverede noter CLRS kapitel 12.

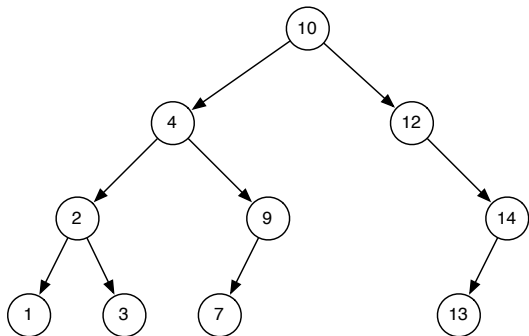
Opgave a Angiv hvordan det binære søgetræ nedenfor ser ud efter indsættelse af et element med nøgle 8.



Opgave b Angiv hvordan det binære søgetræ nedenfor ser ud efter sletning elementet med nøgle 4.



Opgave c Angiv den rækkefølge af knuderne bliver skrevet ud i når man laver et preorder gennemløb af ovenstående træ.



Preorder gennemløb: _____