Mindste udspændende træ

- Introduktion
- Repræsentation af vægtede grafer
- Egenskaber for mindste udspændende træer
- Prims algoritme
- Kruskals algoritme

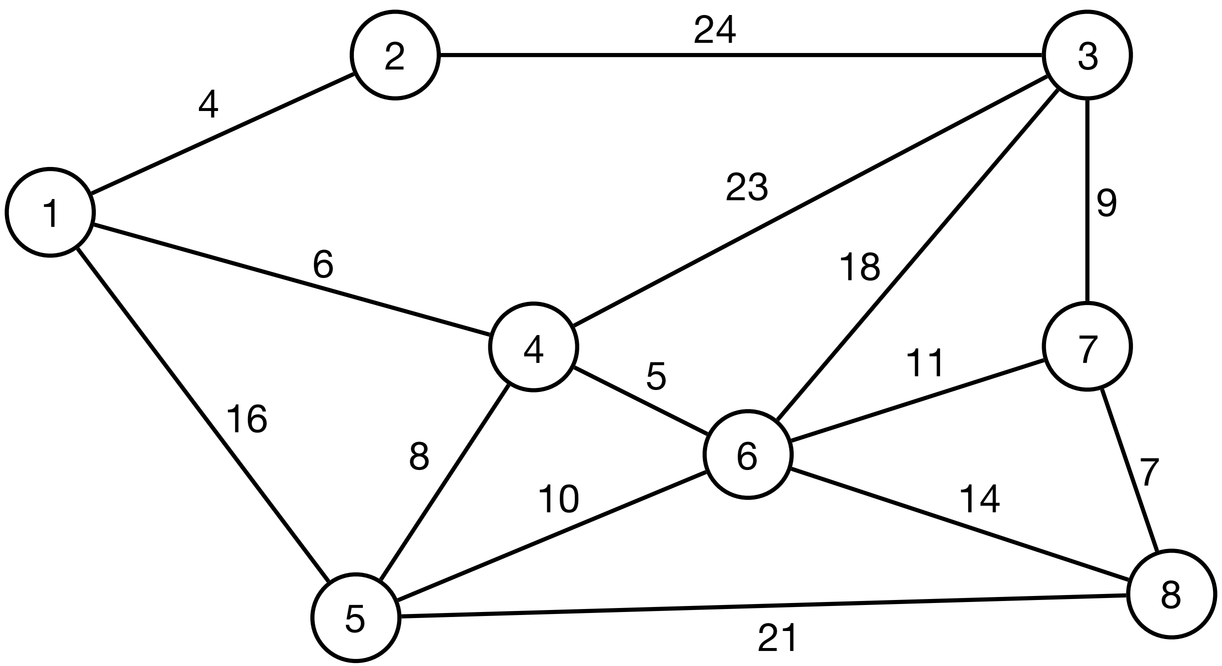
Philip Bille

Mindste udspændende træ

- Introduktion
- Repræsentation af vægtede grafer
- Egenskaber for mindste udspændende træer
- Prims algoritme
- Kruskals algoritme

Introduktion

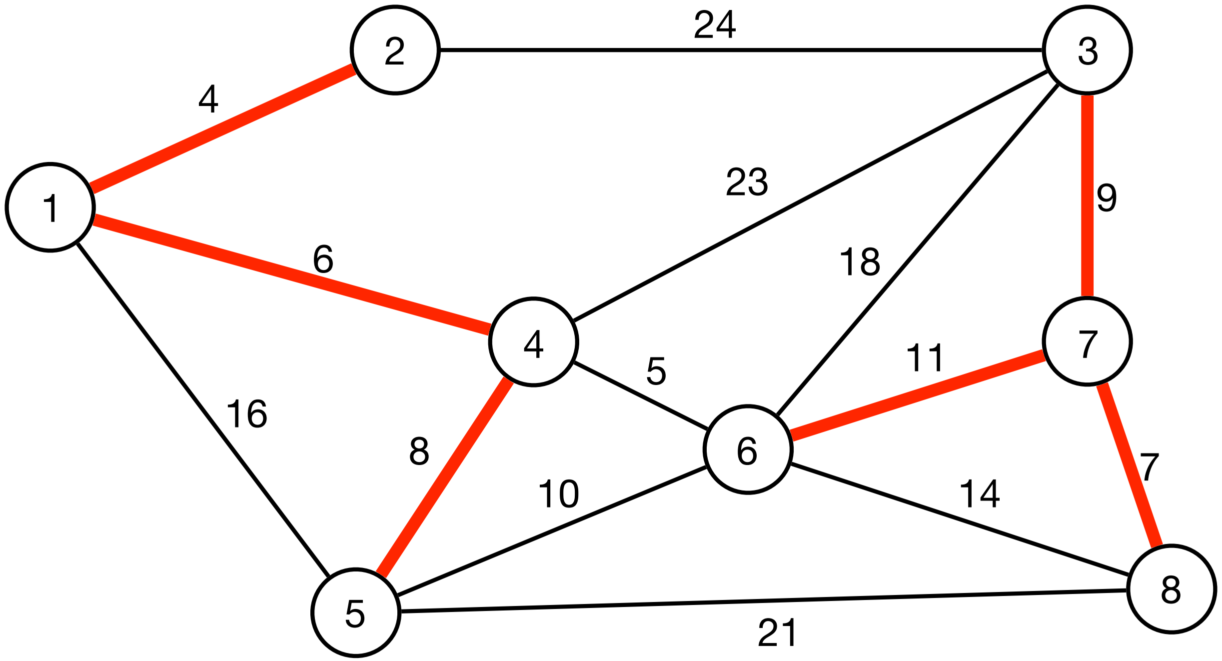
- Vægtede grafer. Vægt w(e) på hver kant e i G.
- Udspændende træ. Delgraf T af G over alle knuder der er sammenhængende og acyklisk.
- Mindste udspændende træ (MST). Udspændende træ af minimal samlet vægt.



Graf G

Introduktion

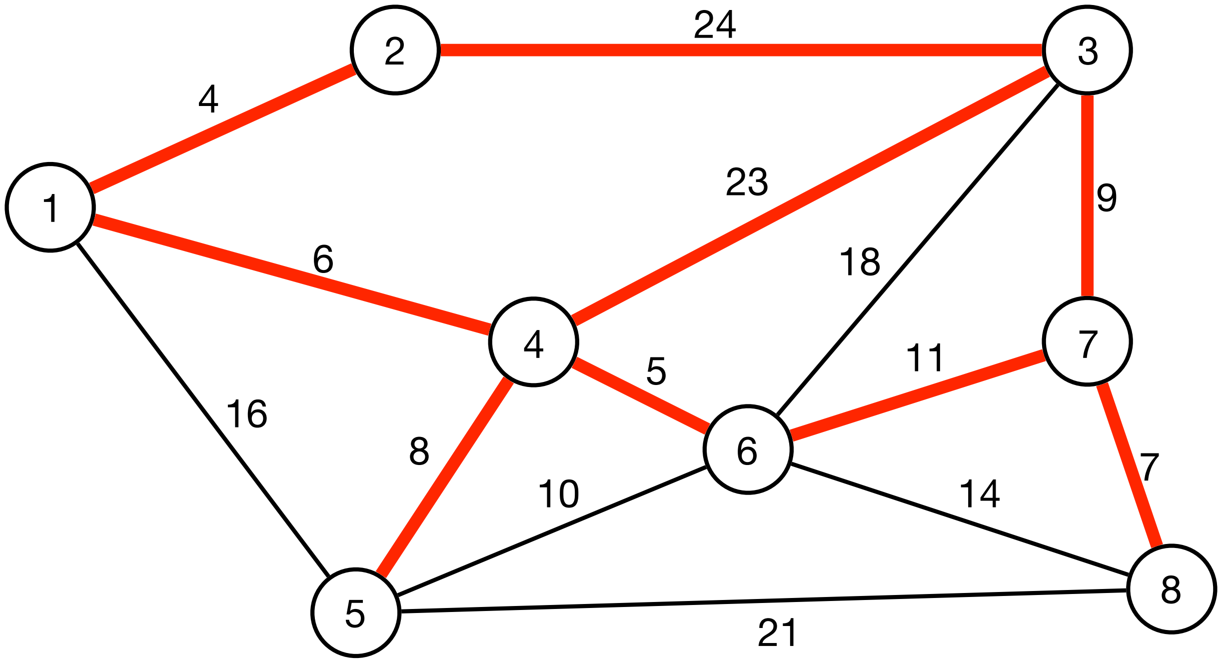
- Vægtede grafer. Vægt w(e) på hver kant e i G.
- Udspændende træ. Delgraf T af G over alle knuder der er sammenhængende og acyklisk.
- Mindste udspændende træ (MST). Udspændende træ af minimal samlet vægt.



Ikke sammenhængende

Introduktion

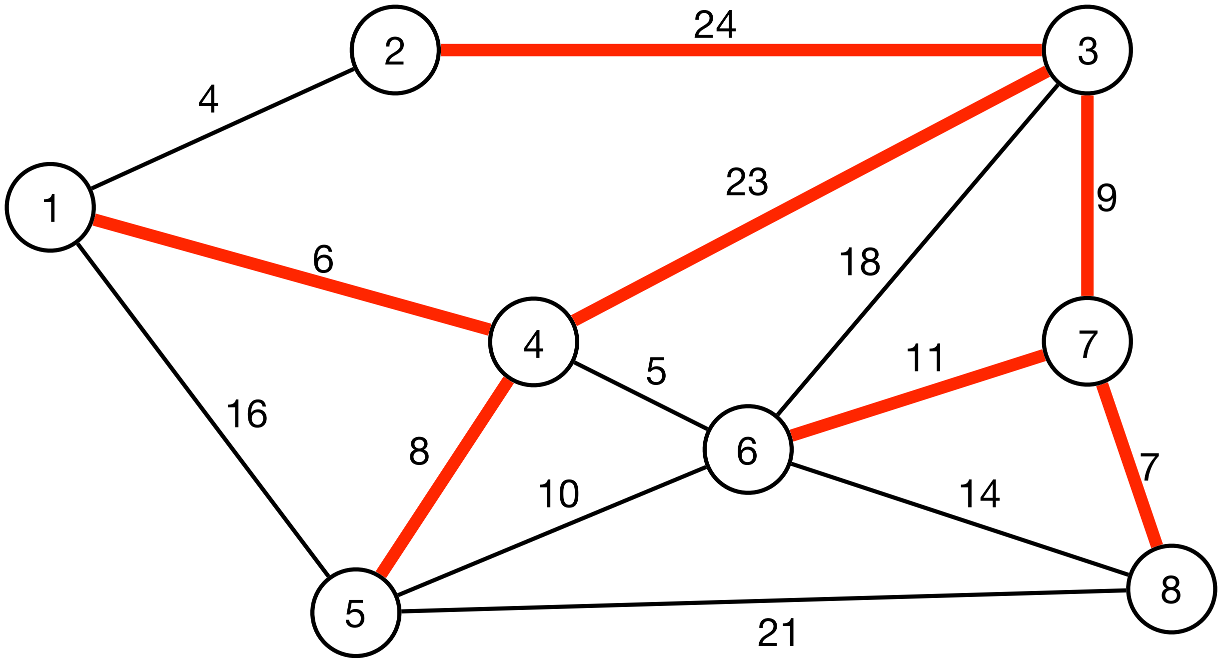
- Vægtede grafer. Vægt w(e) på hver kant e i G.
- Udspændende træ. Delgraf T af G over alle knuder der er sammenhængende og acyklisk.
- Mindste udspændende træ (MST). Udspændende træ af minimal samlet vægt.



Sammenhængende og cyklisk

Introduktion

- Vægtede grafer. Vægt w(e) på hver kant e i G.
- Udspændende træ. Delgraf T af G over alle knuder der er sammenhængende og acyklisk.
- Mindste udspændende træ (MST). Udspændende træ af minimal samlet vægt.

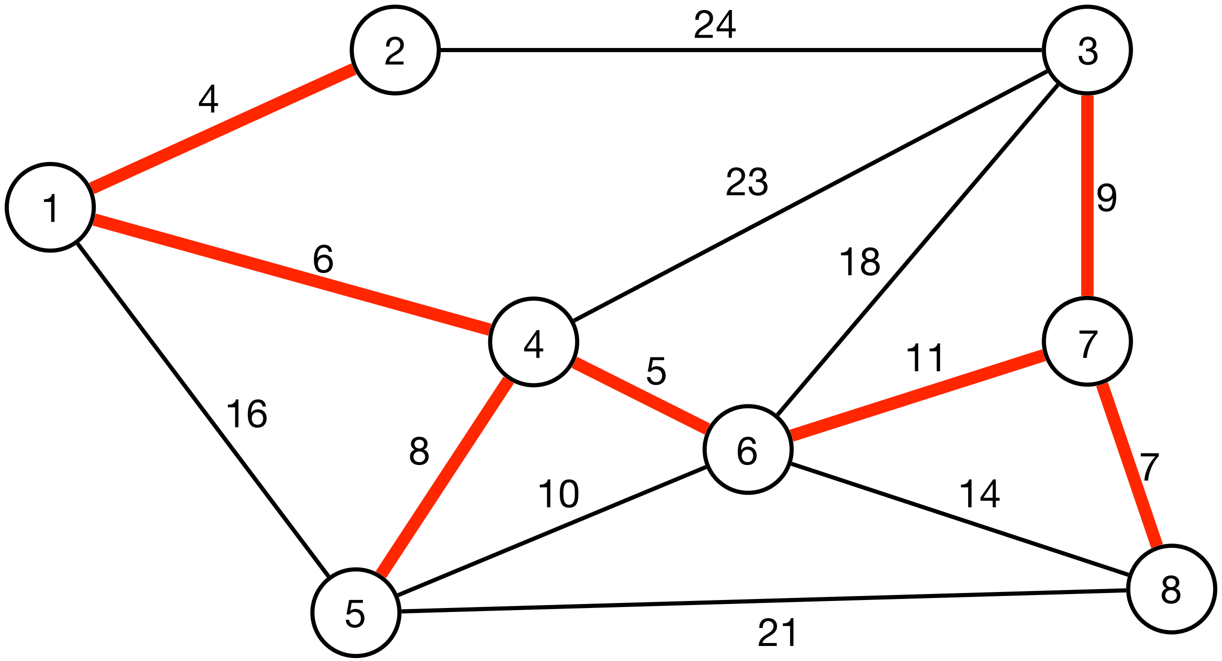


Sammenhængende og acyklisk = udspændende træ T

Vægt af T = 6 + 8 + 23 + 24 + 9 + 11 + 7 = 88

Introduktion

- Vægtede grafer. Vægt w(e) på hver kant e i G.
- Udspændende træ. Delgraf T af G over alle knuder der er sammenhængende og acyklisk.
- Mindste udspændende træ (MST). Udspændende træ af minimal samlet vægt.



Mindste udspændende træ T
Vægt af T = 4 + 6 + 5 + 8 + 11 + 9 + 7 = 50

Anvendelser

- Netværk design.
    - Computer, vej, telefon, elektrisk, kredsløb, kabel tv, hydralisk, …

- Approksimationsalgoritmer.
    - Handelsrejsendes problem, steiner træer.

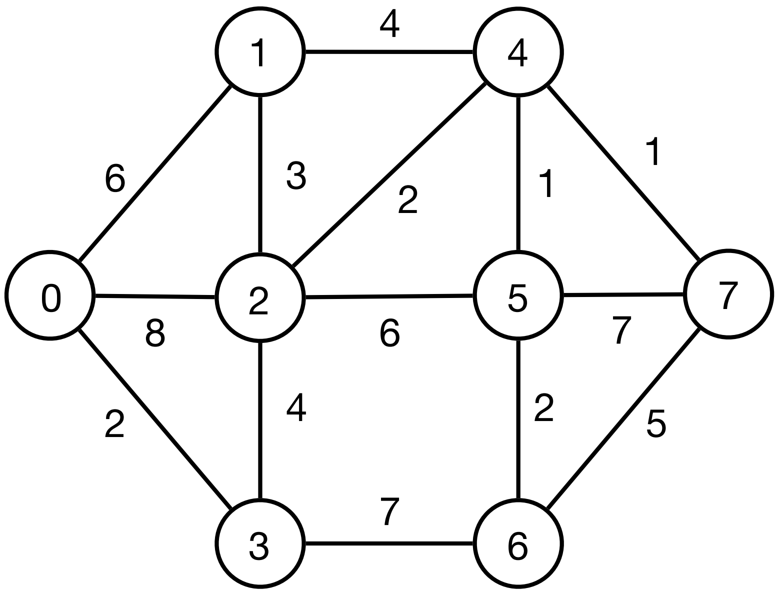
- Andre anvendelser.
    - Meteorologi, kosmologi, biomedicinsk analyse, kodning, billedanalyse, …
    - Se f. eks. http://www.ics.uci.edu/~eppstein/gina/mst

Mindste udspændende træ

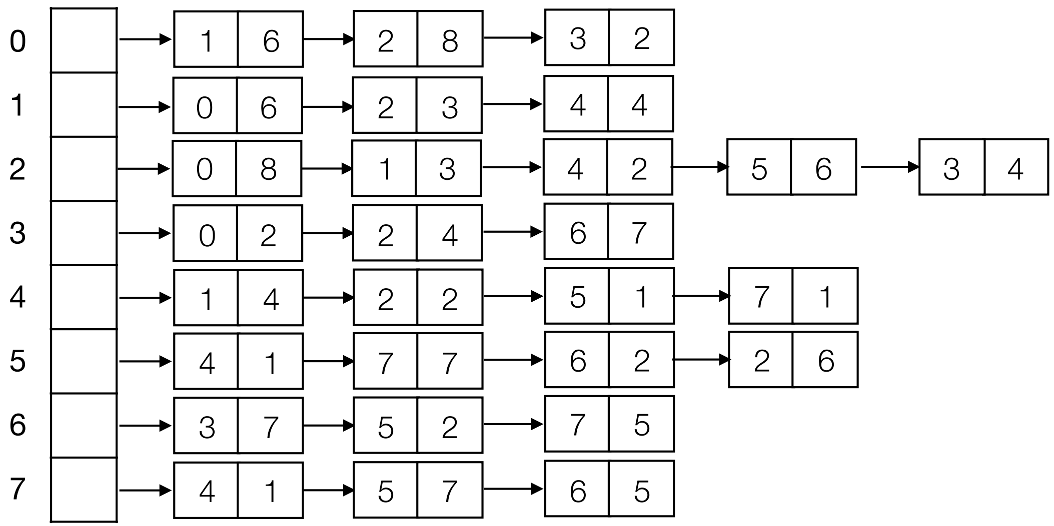
- Introduktion
- Repræsentation af vægtede grafer
- Egenskaber for mindste udspændende træer
- Prims algoritme
- Kruskals algoritme

Repræsentation af vægtede grafer

- Incidensmatrix og incidensliste.
- Tilsvarende for orienterede grafer.



	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	6	8	2	0	0	0	0
1	6	0	3	0	4	0	0	0
2	8	3	0	4	2	6	0	0
3	2	0	4	0	0	0	7	0
4	0	4	2	0	0	1	0	1
5	0	0	6	0	1	0	2	7
6	0	0	0	7	0	2	0	5
7	0	0	0	0	1	7	5	0



Mindste udspændende træ

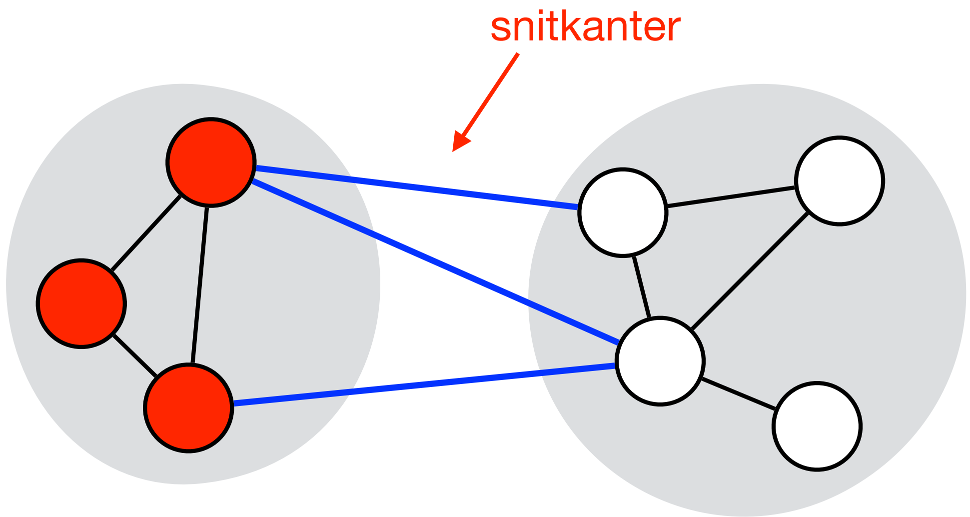
- Introduktion
- Repræsentation af vægtede grafer
- Egenskaber for mindste udspændende træer
- Prims algoritme
- Kruskals algoritme

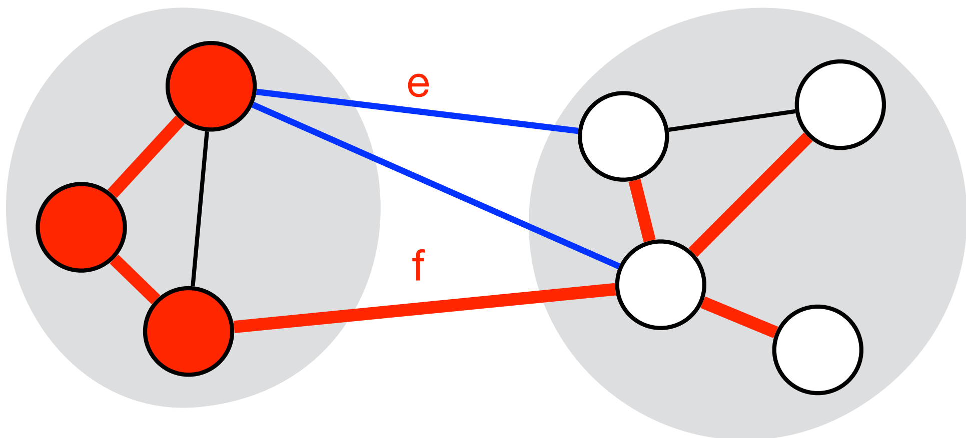
Egenskaber for MST

- Simplificerende antagelse.
  - Alle kantvægte i G er forskellige.
  - G er sammenhængende
- $\Longrightarrow$ MST eksisterer og er unik.

Snitegenskab

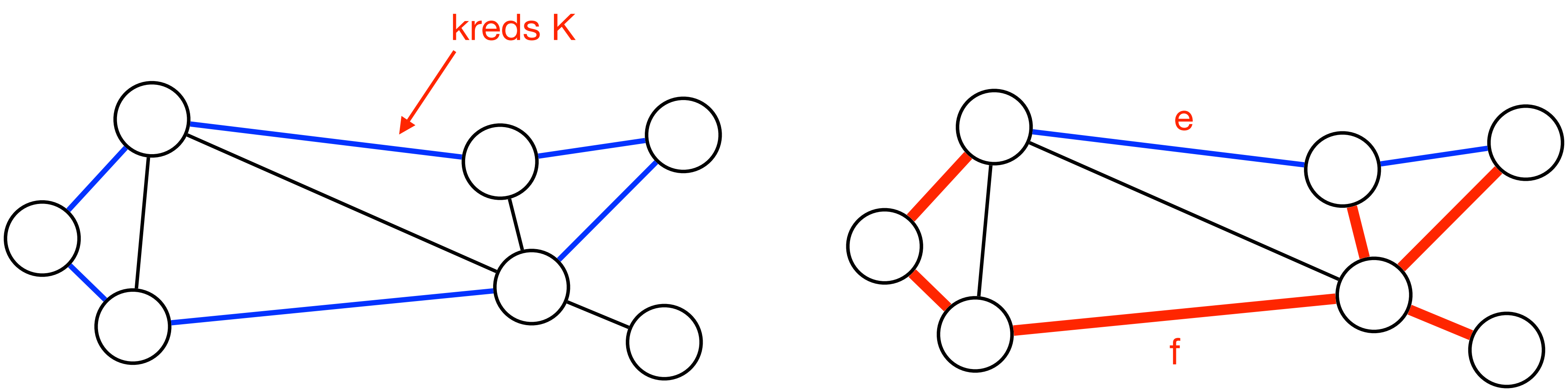
- Def. Et snit er en opdeling af knuderne i to (ikke-tomme) mængder.
- Def. En snitkant i et snit er en kant med et endepunkt i hver side af snittet.
- Snitegenskab. For et vilkårligt snit, er den letteste snitkant med i MST.
- Bevis. Modstridsbevis.
  - Antag den letteste snitkant e for et snit ikke er med i MST.
  - Hvis vi tilføjer e til MST laver vi en kreds.
  - ⟹ Der er en anden snitkant f i kredsen.
  - ⟹ Hvis vi fjerner f og tilføjer e har vi et nyt udspændende træ T.
  - Da $w(e) < w(f)$ er $w(T) < w(MST)$.





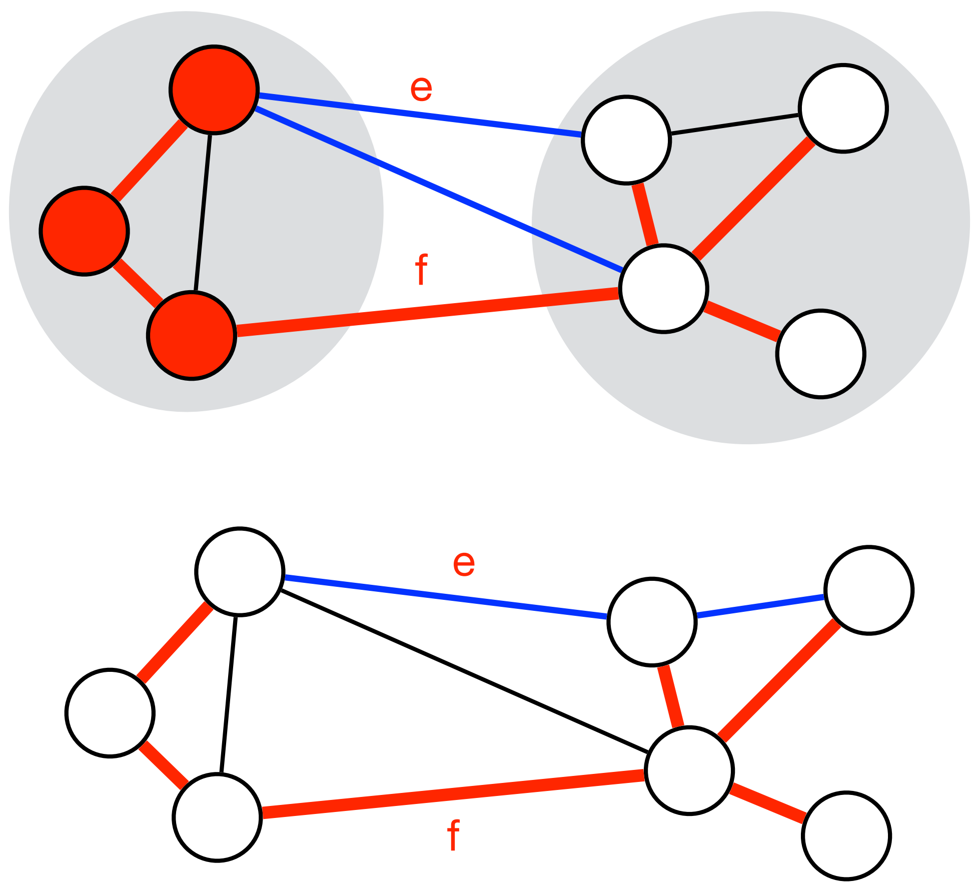
Kredsegenskab

- Kredsegenskab. For en vilkårlig kreds, er den tungeste kant i kreds ikke med i MST.
- Bevis. Modstridsbevis
  - Antag tungeste kant f på en kreds K er indeholdt i MST.
  - ⟹ Der er lettere kant e i K, der ikke er indeholdt i MST.
  - Hvis vi fjerner f og tilføjer e har vi et nyt udspændende træ T.
  - Da $w(e) < w(f)$ er $w(T) < w(MST)$.



Egenskaber for MST

- Snitegenskab. For et vilkårligt snit, er den letteste snitkant med i MST.
- Kredsegenskab. For en vilkårlig kreds, er den tungeste kant i kreds ikke med i MST.

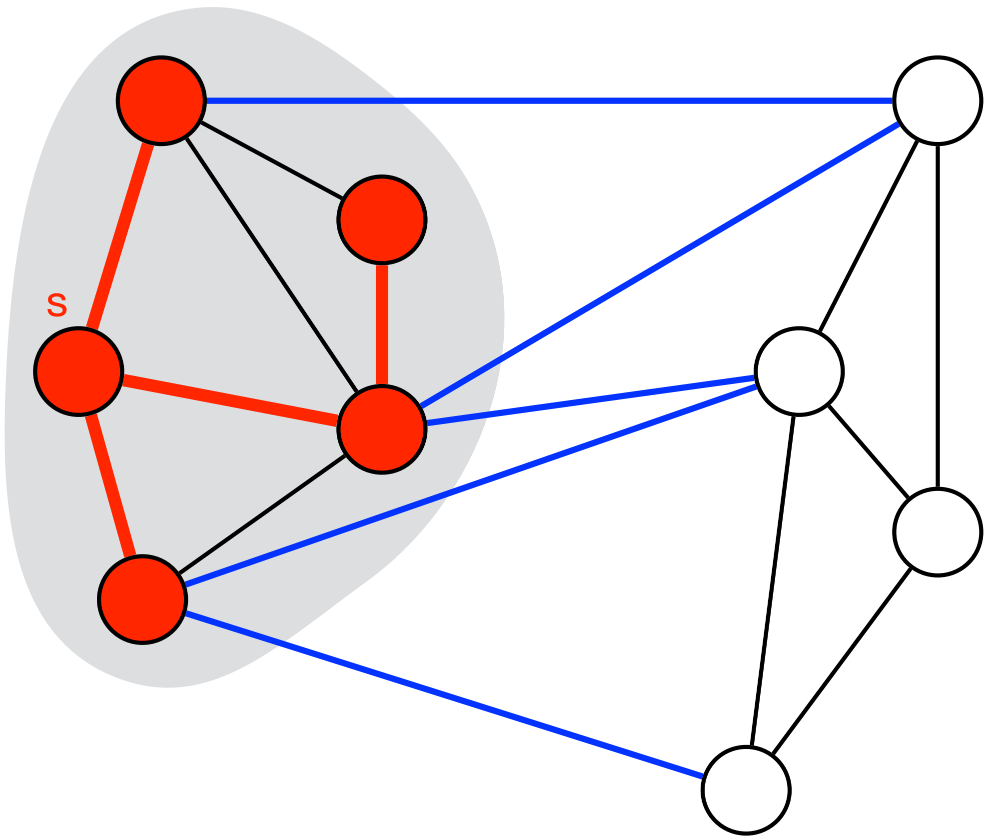


Mindste udspændende træ

- Introduktion
- Repræsentation af vægtede grafer
- Egenskaber for mindste udspændende træer
- Prims algoritme
- Kruskals algoritme

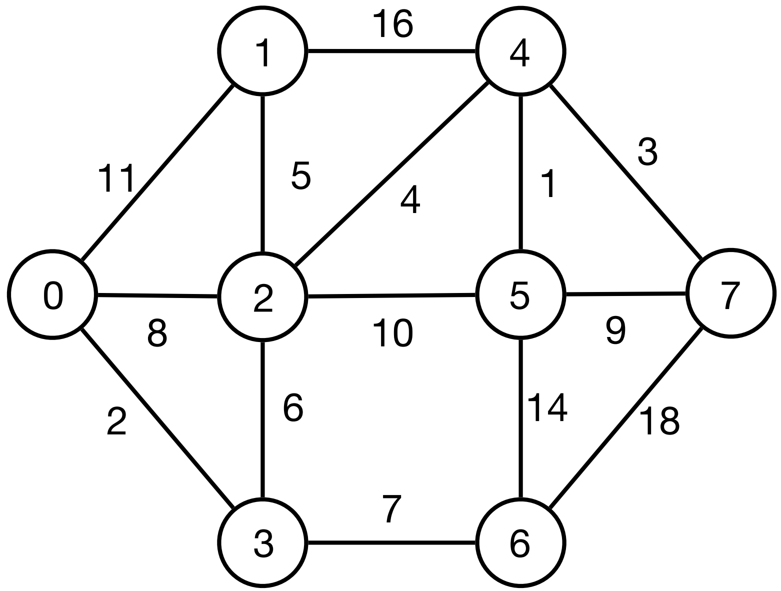
Prims algoritme

- Start ved en knude s og opbyg et træ T fra s.
- I hvert skridt, tilføj letteste kant med netop et endepunkt i T.
- Stop når T har n-1 kanter.



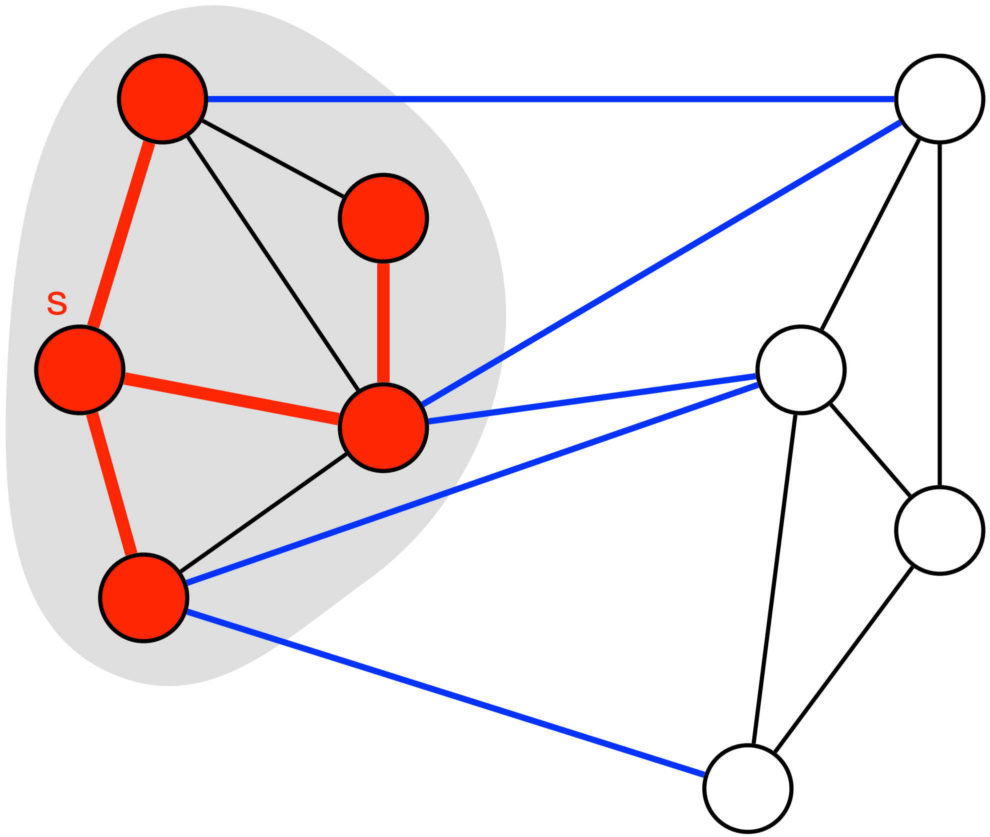
Prims algoritme

- Start ved en knude s og opbyg et træ T fra s.
- I hvert skridt, tilføj letteste kant med netop et endepunkt i T.
- Stop når T har n-1 kanter.
- Opgave. Håndkør Prims algoritme fra knude 0 på følgende graf.



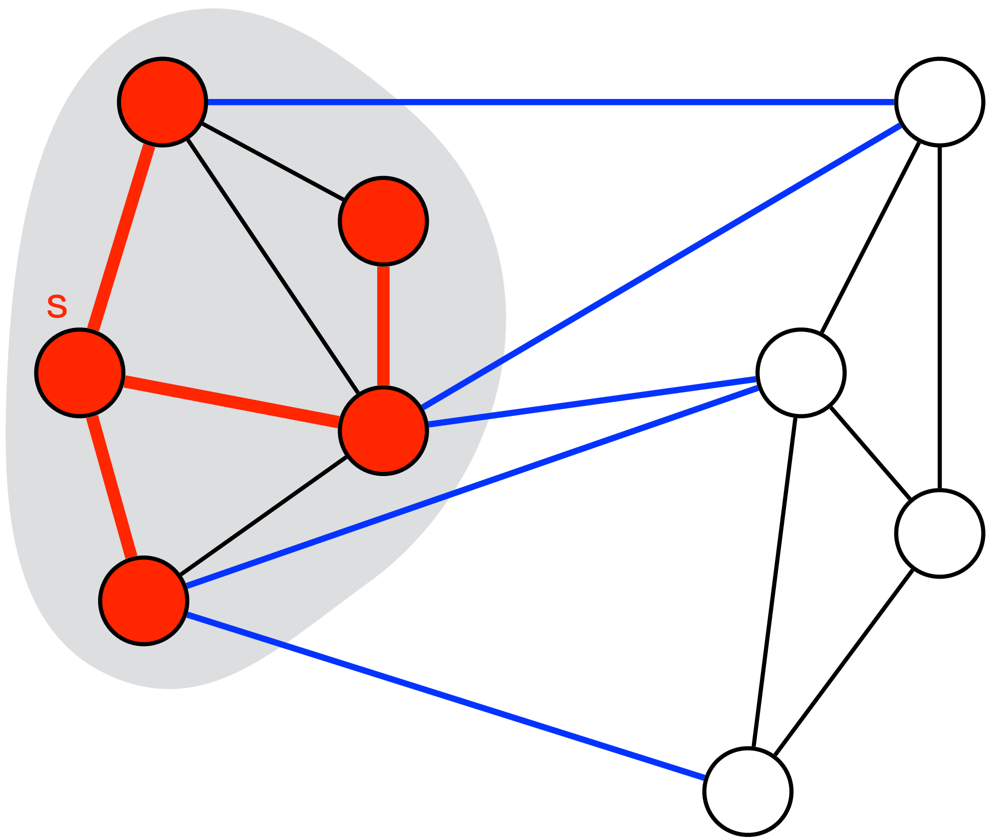
Prims algoritme

- Lemma. Prims algoritme beregner MST.
- Bevis.
  - Kig på snit mellem besøgte og ikke besøgte knuder i et skridt af algoritme.
  - Vi tilføjer letteste snitkant e til T.
  - Snitegenskab $\Longrightarrow$ kanten e er i MST $\Longrightarrow$ T er MST efter n-1 skridt.



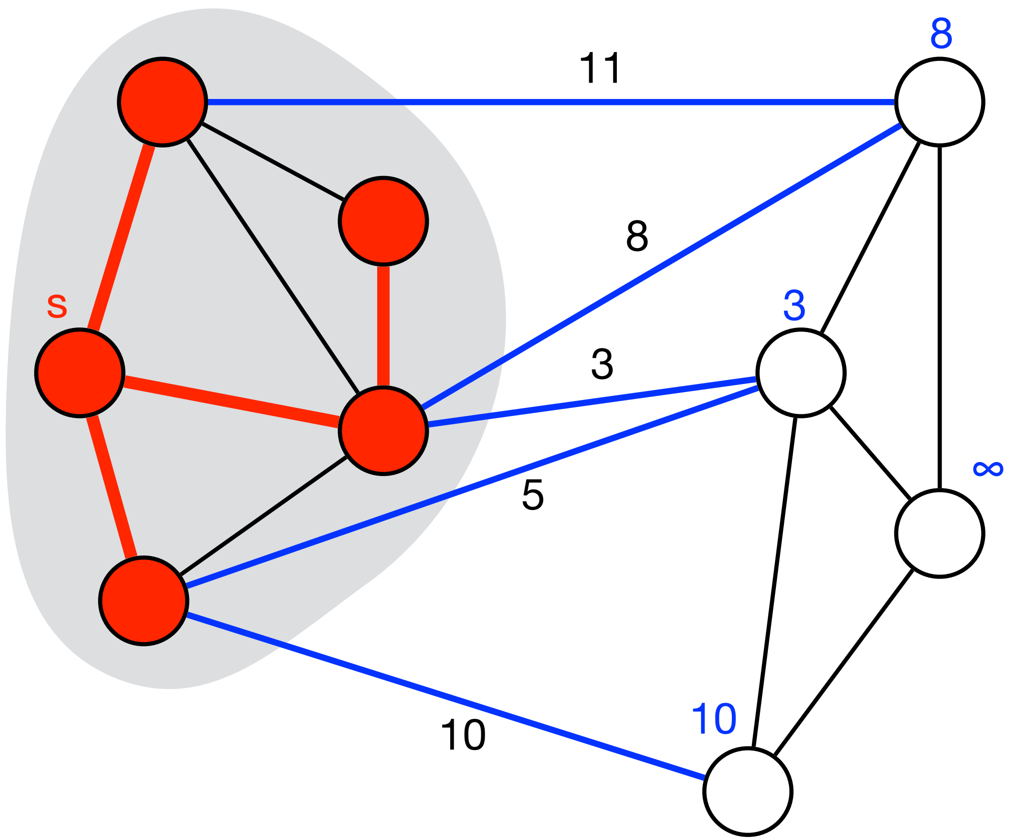
Prims algoritme

- Implementation. Hvordan implementerer vi Prims algoritme?
- Udfordring. Find den letteste kant med netop et endepunkt i T.



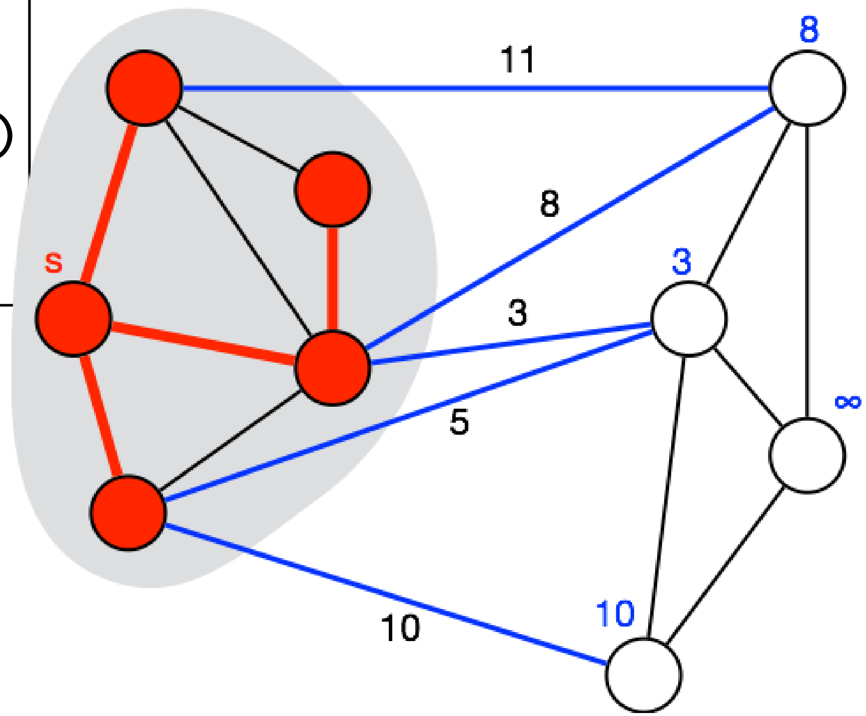
Prims algoritme

- Implementation. Vedligehold knuder uden for snit i prioritetskø.
  - Nøgle af knude v = letteste kant der forbinder v til træet. (∞ hvis ikke forbundet).
  - I hvert skridt:
    - Find letteste kant = EXTRACT-MIN
    - Opdater vægt af naboer af ny knude med DECREASE-KEY.



Prims algoritme

```
PRIM(G, s)
    for alle knuder v∈V
        v.key = ∞
        v.π = null
        INSERT(P,v)
    DECREASE-KEY(P,s,0)
    while (P ≠ ∅)
        u = EXTRACT-MIN(P)
        for alle naboer v af u
            if (v ∈ P and w(u,v)<key[v])
                DECREASE-KEY(P,v,w(u,v))
                v.π = u
```



- Tid.
    - n EXTRACT-MIN
    - n INSERT
    - O(m) DECREASE-KEY
- Samlet tid med min-hob. O(n log n + n log n + m log n) = O(m log n)

Prims algoritme

- Theorem. Prims algoritme implementeret med en min-hob beregner en MST i O(m log n) tid.
- Grådighed. Prims algoritme er eksempel på en grådig algoritme.
  - I hvert skridt, træf det optimale lokale valg.
  - $\Longrightarrow$ global optimal løsning.

Prims algoritme

- Prioritetskøer og Prim. Kompleksitet af Prims algoritme afhænger af prioritetskø:
  - n INSERT
  - n EXTRACT-MIN
  - m + 1 DECREASE-KEY

Prioritetskø	INSERT	EXTRACT-MIN	DECREASE-KEY	Total
tabel	O(1)	O(n)	O(1)	$O(n^2)$
binær hob	O(log n)	O(log n)	O(log n)	O(m log n)
Fibonacci hob	O(1)†	O(log n)†	O(1)†	O(m + n log n)

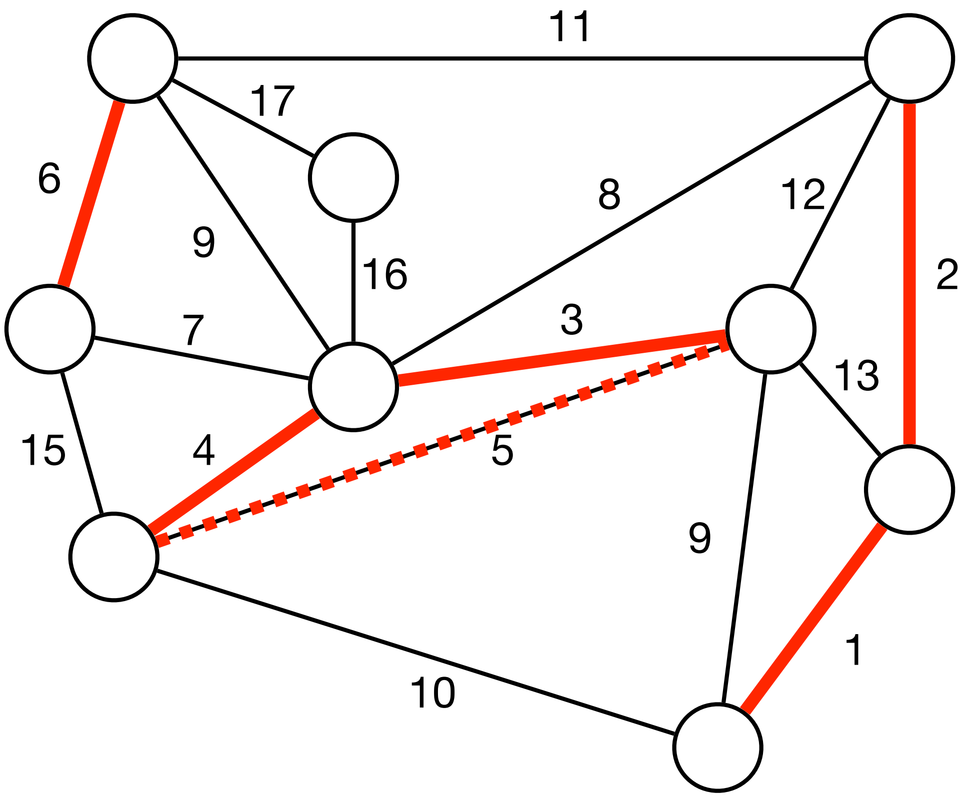
† = amortiseret køretid

Mindste udspændende træ

- Introduktion
- Repræsentation af vægtede grafer
- Egenskaber for mindste udspændende træer
- Prims algoritme
- Kruskals algoritme

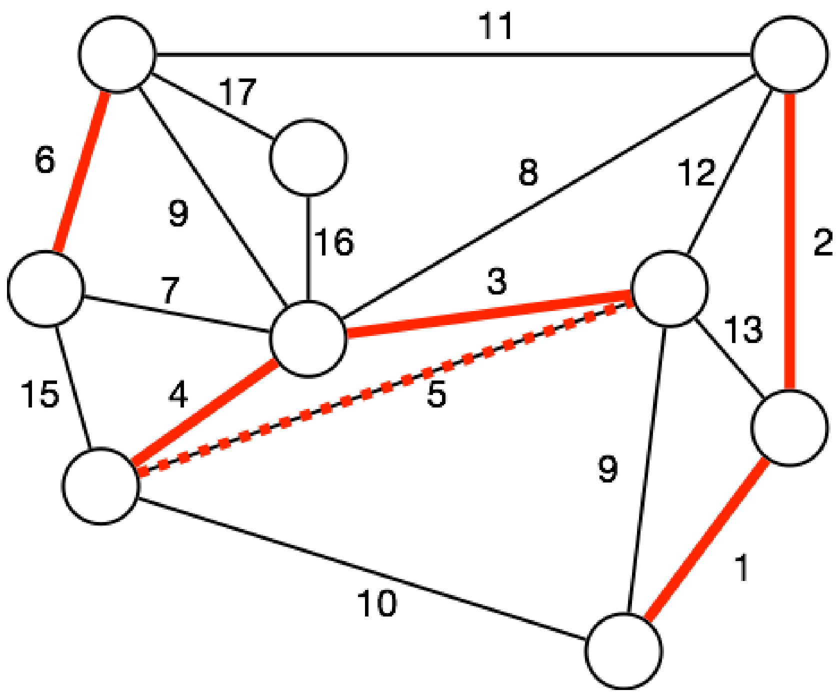
Kruskals algoritme

- Kig på kanter fra letteste til tungeste.
- I hvert skridt, tilføj kant til T hvis den ikke medfører en kreds i T.
- Stop når T har n-1 kanter.



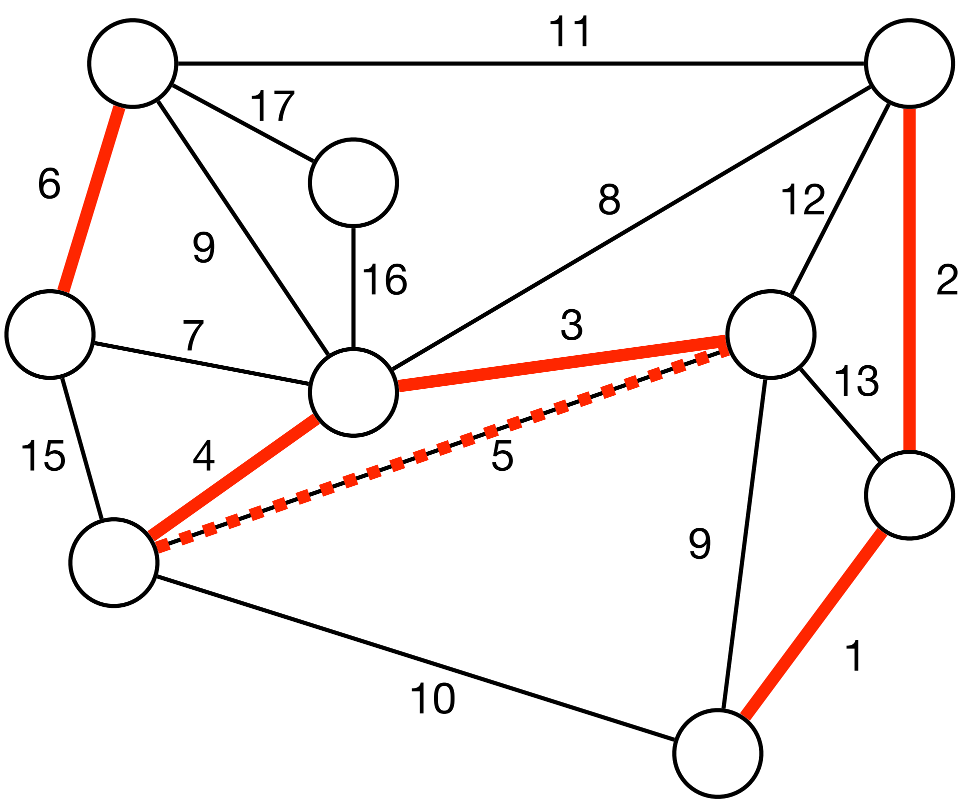
Kruskals algoritme

- Lemma. Kruskals algoritme beregner MST.
- Bevis.
  - Algoritme kigger på kanter fra letteste til tungest. To tilfælde for en kant e = (u,v).
  - Tilfælde 1. e danner kreds og bliver ikke tilføjet til T.
    - e er tungeste kant på kreds.
    - Kredsegenskab ⟹ e er ikke med i MST.
  - Tilfælde 2. e danner ikke kreds og bliver tilføjet til T.
    - e er letteste kant på snittet givet ved sammenhængskomponenter for u og v.
    - Snitegenskab ⟹ e er med i MST.
  - ⟹ T er MST når n-1 kanter er tilføjet.



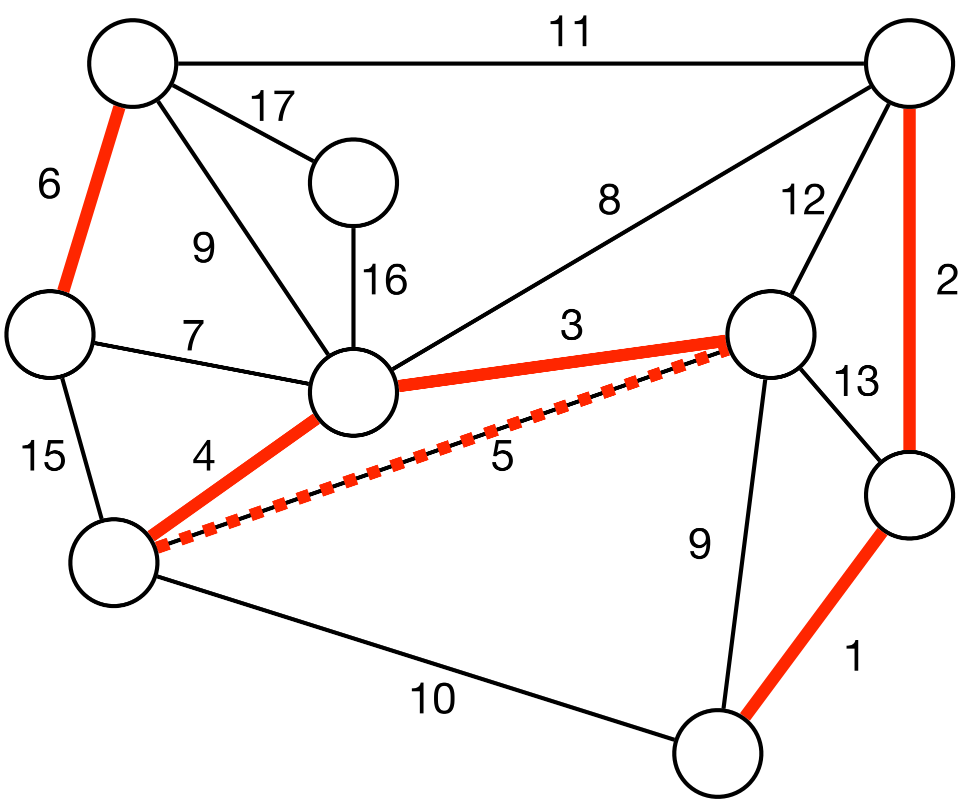
Kruskals algoritme

- Implementation. Hvordan implementerer vi Kruskals algoritme?
- Udfordring. Afgør om en kant danner en kreds.



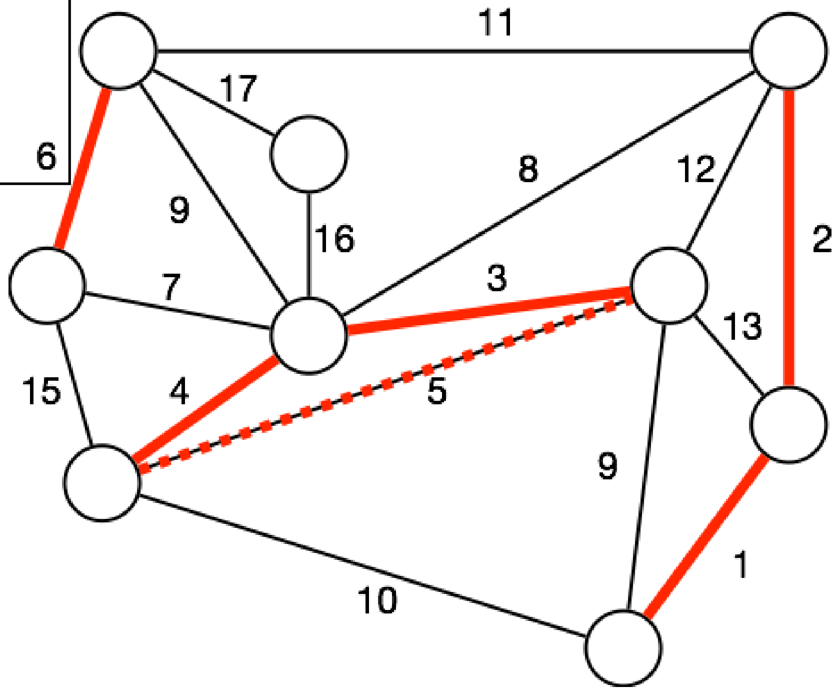
Kruskals algoritme

- Implementation. Vedligehold kanter i T i datastruktur til dynamiske sammenhængskomponenter.
  - I hvert skridt:
    - Undersøg om kant danner en kreds = CONNECTED.
    - Tilføj ny kant = INSERT.



Kruskals algoritme

```
KRUSKAL(G)
    Sorter kanter
    INIT(n)
    for alle kanter (u,v) i sort. orden
        if (!CONNECTED(u,v))
            INSERT(u,v)
    return indsatte kanter
```



- Tid.
  - Sortering af m kanter.
  - 1 INIT
  - m CONNECTED
  - n INSERT
- Samlet tid med vægtet forening. O(m log m + n + m log n + n log n) = O(m log n).

Kruskals algoritme

- Theorem. Kruskals algoritme implementeret med vægtet forening beregner en MST i O(m log n) tid.
- Grådighed. Kruskals algoritme er også eksempel på en grådig algoritme.

Mindste udspændende træ

- Hvad er den bedste algoritme til MST? Kan man løse problemet i lineær tid?

År	Tid	Opdaget af
???	O(n log m)	Jarnik, Prim, Dijkstra, Kruskal, Boruvka, ?
1975	O(m log log n)	Yao
1986	$O(m \log^* n)$	Fredman, Tarjan
1995	$O(m)^{‡}$	Karger, Klein, Tarjan
2000	$O(n\alpha(m,n))$	Chazelle
2002	optimal	Pettie, Ramachandran
20xx	O(m)	???

‡ = randomiseret køretid

Mindste udspændende træ

- Introduktion
- Repræsentation af vægtede grafer
- Egenskaber for mindste udspændende træer
- Prims algoritme
- Kruskals algoritme