# Hashing

- Ordbøger
- Hægtet hashing
- Hashfunktioner
- Lineær probering

Philip Bille

# Hashing

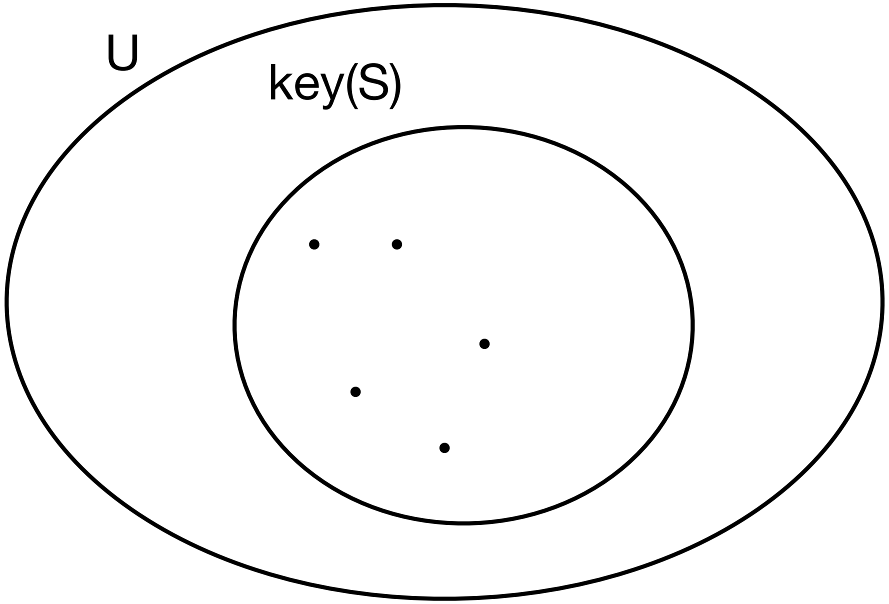
- Ordbøger
- Hægtet hashing
- Hashfunktioner
- Lineær probering

# Ordbøger

- Ordbøger. Vedligehold en dynamisk mængde S af elementer. Hvert element har en nøgle x.key fra et univers af nøgler U og satellitdata x.data.

- Ordbogsoperationer.
  - SEARCH(k): afgør om element med nøgle k findes i S, og returner elementet.
  - INSERT(x): tilføj x til S (vi antager x ikke findes i forvejen)
  - DELETE(x): fjern x fra S.

- Eksempel.
  - U = {0,..,99}
  - key(S) = {1, 13, 16, 41, 54, 66, 96}



# Ordbøger

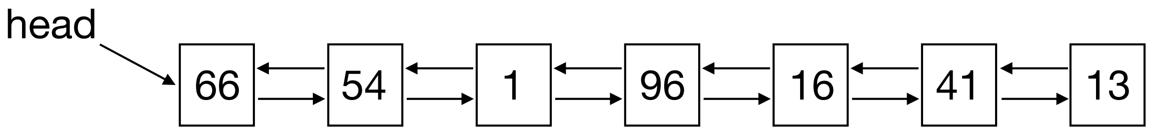
- Anvendelser.
    - Grundlæggende datastruktur til at repræsentere en mængde.
    - Bruges i mange algoritmer og datastrukturer.

# Ordbøger

- Udfordring. Hvordan kan vi løse problemet med nuværende teknikker?

# Ordbøger

- Løsning med hægtet liste. Gem S i hægtet liste.




- SEARCH(k): lineær søgning i listen efter nøgle k.
- INSERT(x): Indsæt x i start af liste (antager element ikke findes i forvejen).
- DELETE(x): fjern x fra liste.

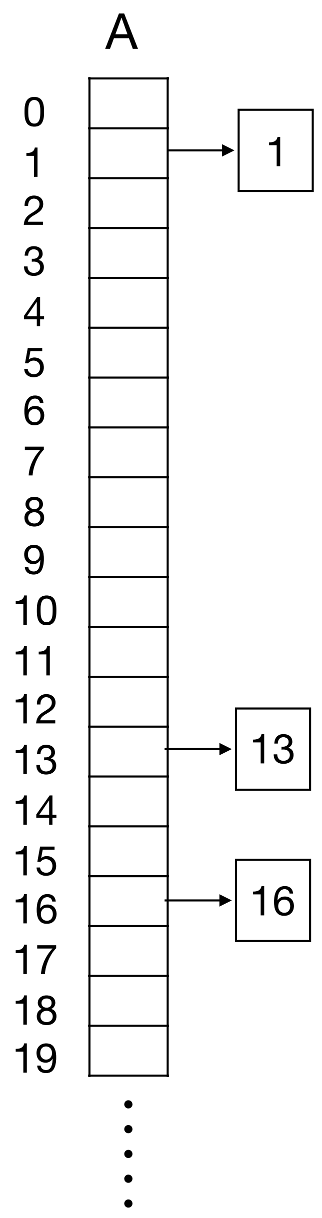
- Tid.
  - SEARCH i O(n) tid.
  - INSERT og DELETE i O(1) tid.
- Plads.
  - O(n).

# Ordbøger

- Løsning med direkte addressering (*direct addressing*).
    - Gem S i tabel A af størrelse U.
    - Gem element x på position A[key[x]]

- SEARCH(k): returner A[x.key].
- INSERT(x): Sæt A[x.key] = x.
- DELETE(x): Sæt A[x.key] = null.

- Tid.
    - SEARCH, INSERT og DELETE i O(1) tid.
- Plads.
    - O(|U|)



# Ordbøger

| Datastruktur | SEARCH | INSERT | DELETE | Plads |
|---|---|---|---|---|
| hægtet liste | O(n) | O(1) | O(1) | O(n) |
| direkte addressering | O(1) | O(1) | O(1) | O(\|U\|) |

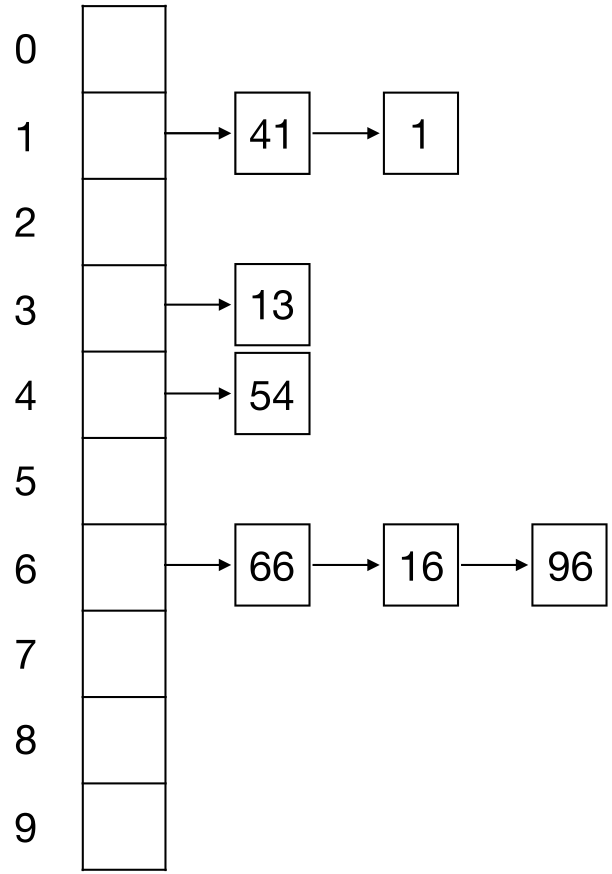
- Udfordring. Kan vi gøre det betydeligt bedre?

# Hashing

- Ordbøger
- Hægtet hashing
- Hashfunktioner
- Lineær probering

# Hægtet hashing

- Ide. Find en hashfunktion h : U → {0, ... , m-1}, hvor m = Θ(n). Hashfunktion skal fordele nøglerne fra S nogenlunde jævnt over {0, ..., m-1}.
- Hashing = forkludre, sprede, bikse.
- Hægtet hashing (*chained hashing*).
  - Vedligehold tabel A[0..m-1].
  - Element x gemt i hægtet liste på A[h(x.key)].
- Kollision.
  - x og y kolliderer hvis h(x.key) = h(y.key).
- SEARCH(k): lineær søgning i liste A[h(k)] efter nøgle k.
- INSERT(x): Indsæt x i start af liste A[h(x.key)].
- DELETE(x): fjern x fra liste A[h(x.key)].




U = {0,..,99}

key(S) = {1, 13, 16, 41, 54, 66, 96}

m = 10

h(k) = k mod 10

# Hægtet hashing

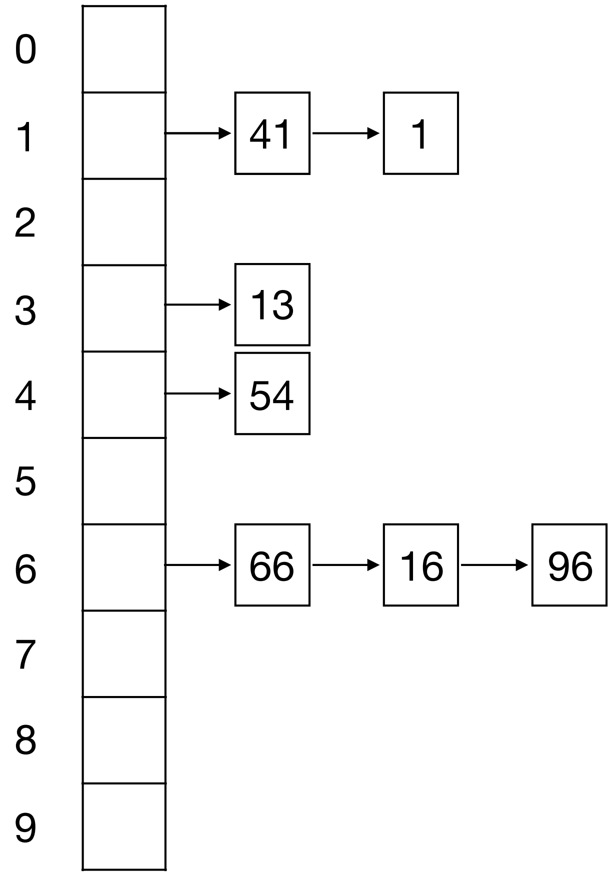
- SEARCH(k): lineær søgning i liste A[h(k)] efter nøgle k.
- INSERT(x): Indsæt x i start af liste A[h(x.key)].
- DELETE(x): fjern x fra liste A[h(x.key)].

- Opgave. Indsæt følgende nøglesekvens K = 5, 28, 19, 15, 20, 33, 12, 17, 10 i en hashtabel af størrelse 9 vha. hægtet hashing med hashfunktionen h(k) = k mod 9.

# Hægtet hashing

- SEARCH(k): lineær søgning i liste A[h(k)] efter nøgle k.
- INSERT(x): Indsæt x i start af liste A[h(x.key)].
- DELETE(x): fjern x fra liste A[h(x.key)].

- Tid.
  - SEARCH i O(længde af liste) tid.
  - INSERT og DELETE i O(1) tid.
  - Længde af lister er afhængig af hashfunktion.
- Plads.
  - $O(m + n) = O(n)$.




U = {0,..,99}

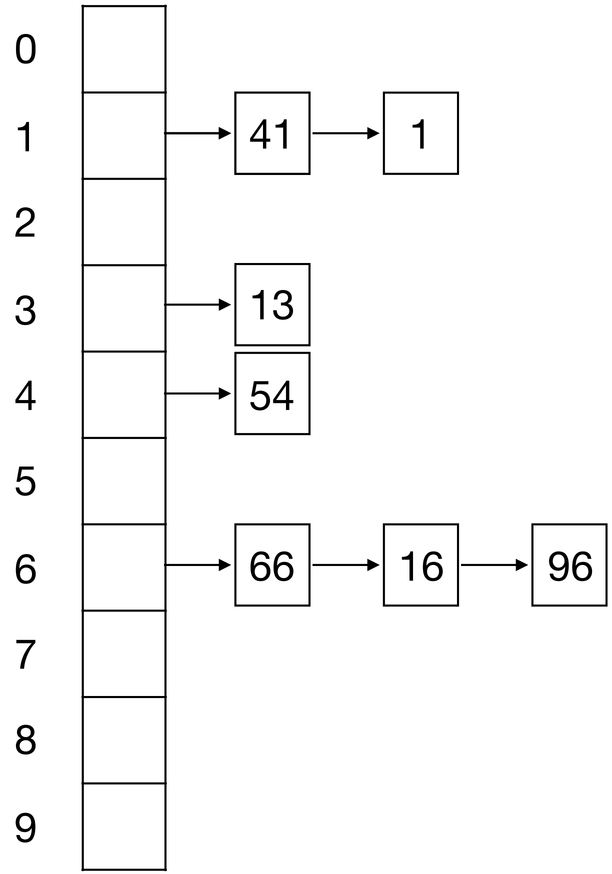
key(S) = {1, 13, 16, 41, 54, 66, 96}

$m = 10$

$h(k) = k \bmod 10$

# Uniform hashing

- Def. Belastningsfaktor *(load factor)* α = n/m = gennemsnitlig længde af lister. m = Θ(n) ⇒ α = O(1).
- Simpel uniform hashing. Antag at hvert element afbildes uniformt tilfældigt i A.
  - Forventet længde af liste = α.
  - ⇒ forventet tid for SEARCH er O(1)
- Tid.
  - SEARCH i O(1) forventet tid.
  - INSERT og DELETE i O(1) tid.




U = {0,..,99}

key(S) = {1, 13, 16, 41, 54, 66, 96}

m = 10

h(k) = k mod 10

# Ordbøger

| Datastruktur | SEARCH | INSERT | DELETE | Plads |
|---|---|---|---|---|
| hægtet liste | $O(n)$ | $O(1)$ | $O(1)$ | $O(n)$ |
| direkte addressering | $O(1)$ | $O(1)$ | $O(1)$ | $O(\|U\|)$ |
| hægtet hashing | $O(1)^{\dagger}$ | $O(1)$ | $O(1)$ | $O(n)$ |

† = forventet køretid med antagelse om simpel uniform hashing

- Udfordring. Hvad kan vi gøre uden at antage simpel uniform hashing? Findes der hashfunktioner der fordeler en mængde nøgler nogenlunde jævnt?

# Hashing

- Ordbøger
- Hægtet hashing
- Hashfunktioner
- Lineær probering

# Hashfunktioner

- Divisionsmetoden.
  - h(k) = k mod m, hvor m er et primtal.
  - Primtal m fordi fælles divisorer af nøgler og m kan reducere udnyttelse af tabel.
  - h(k) = ak mod m er lidt bedre.

- Multiplikationsmetoden.
  - $h(k) = \lfloor m(kZ - \lfloor kZ \rfloor) \rfloor$, hvor Z er en konstant $0 < Z < 1$.

# Hashfunktioner

- Hashfunktioner for andet end heltal. Alt er gemt som bits og kan derfor hashes.

- Flydende tal. Konverter til bitrepræsentation.

- Strenge. Bogstaver er heltal og så streng kan konverteres til sekvens af cifre. F. eks. "CLRS":
    - 256 forskellige ASCII-koder for bogstaver.
    - C = 67, L = 76, R = 82 og S = 83.
    - $\Rightarrow$ "CLRS" $= 67 \cdot 256^3 + 76 \cdot 256^2 + 82 \cdot 256^1 + 83 \cdot 256^0 = 1129075283$

- Andre objekter. Definer hashfunktion baseret på datafelter.

# Universel hashing

- Kan vi konstruere hashfunktioner med beviselige garantier uden antagelse om uniform hashing?
- Ide (universelle hashfunktioner). Vælg en tilfældig hashfunktion h uniformt tilfældigt fra en mængde H af funktioner der kan beskrives kompakt og beregnes hurtigt og tilfredsstiller
  - For alle $k_1 \neq k_2$ i U skal $\Pr[h(k_1) = h(k_2)] \leq 1/m$.

- Eksempel.
  - $h_{a,b}(k) = (ak + b \bmod p) \bmod m$ for primtal p
  - $H = \{h_{a,b}(k) \mid a \in \{1, .., p-1\}, b \in \{0, ..., p-1\}\}$

- Universel hashfunktion ⇒ Hægtet hashing i O(1) forventet tid uden antagelse om uniform hashing.
- Kun afhængig af tilfældigt valg fra H.

# Hashing

- Anvendelser. Kodning, kryptografi, similaritet, geometri, ...

# Hashing

- Ordbøger
- Hægtet hashing
- Hashfunktioner
- Lineær probering

# Lineær probering

- Lineær probering (*linear probing*).
  - Gem S i tabel A af størrelse m.
  - Element x gemt i A[h(x.key)] eller i klynge (*cluster*) til højre for A[h(x.key)].
  - Klynge = fortløbende (cyklisk) sekvens af fyldte indgange.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 41 | 1 | 11 | 13 | 54 | | | 98 | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

h(k) = k mod 10

- SEARCH(k): lineær søgning fra A[h(x.key)] i klynge til højre for A[h(x.key)]
- INSERT(x): indsæt x på A[h(x.key)]. Hvis optaget, indsæt på næste tomme indgang til højre for x.
- DELETE(x): fjern x fra A[h(x.key)]. Genindsæt alle elementer til højre for i klyngen.

# Lineær probering

- Caching. Lineær probering er meget cache-effektivt.
- Klumpning (*clustering*). Nøgler har en tendens at "klumpe" sammen.

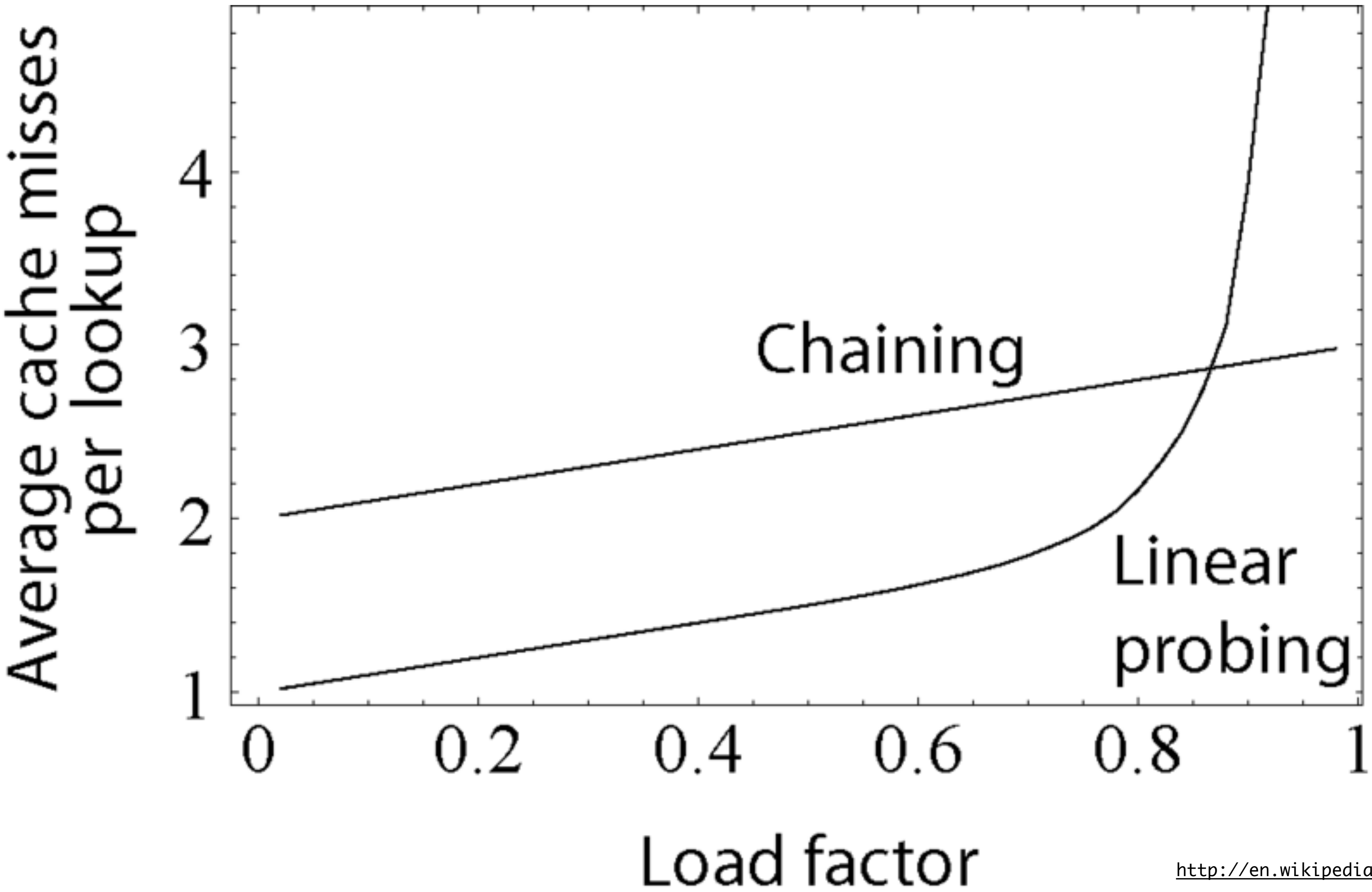
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 41 | 1 | 11 | 13 | 54 | | | 98 | |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

$h(k) = k \bmod 10$

- Theorem. Simpel uniform hashing ⟹ forventede antal proberinger = $1/(1 - \alpha)$.

# Lineær probering

- Lineær probering vs. hægtet hashing.




http://en.wikipedia.org/wiki/Hash_table

# Åben addressering

- Åben addressering (open addressing).
  - Lineær probering.
  - Kvadratisk probering.
  - Dobbelt hashing.

# Hashing

- Ordbøger
- Hægtet hashing
- Hashfunktioner
- Lineær probering