Analyse af algoritmer

- Analyse af algoritmer
  - Køretid
  - Pladsforbrug
- Asymptotisk notation
  - O, Θ og Ω-notation.
- Eksperimentiel analyse af algoritmer

Philip Bille

Analyse af algoritmer

- Analyse af algoritmer
  - Køretid
  - Pladsforbrug
- Asymptotisk notation
  - O, Θ og Ω-notation.
- Eksperimentiel analyse af algoritmer

Analyse af algoritmer

- Mål. At bestemme og forudsige resourceforbrug og korrekthed af algoritmer

- Eks.
  - Virker min algoritme til at beregne korteste veje i grafer?
  - Hvor hurtigt kører min algoritme til at søge efter approximativt matchende billeder i en billeddatabase? Skalerer den til 100000+ billeder?
  - Løber min indekseringsalgoritme til DNA-sekvenser tør for hukommelse når jeg indekserer 1000 menneskergenomer?
  - Hvor mange cache-misses genererer min sorteringsalgoritme?

- Primært fokus.
  - Korrekthed, køretid og pladsforbrug.
  - Teoretisk og eksperimentiel analyse.

Køretid

- Køretid. Antallet af skridt som en algoritmen udfører på et input af størrelse n.
- Skridt.
  - Læsning/skrivning til hukommelse (x := y, A[i], i = i + 1, ...)
  - Arithmetiske/boolske operationer (+,-,*,/,%,&&,||, &, |, ^,~)
  - Sammenligninger (<,>,=<, =>, =, ≠)
  - Programflow (if-then-else, while, for, goto, funktionskald, ..)
- Terminologi. Køretid, tid, tidskompleksitet.

Køretid

- Værstefalds-køretid (*worst-case running time*). Maksimal køretid over alle input af størrelse n.
- Bedstefalds-køretid (*best-case running time*). Minimal køretid over alle input af størrelse n.
- Gennemsnitlige-køretid (*average-case running time*). Gennemsnitlig køretid over alle input af størrelse n.
- Terminologi. Køretid = værstefalds-køretid (medmindre vi eksplicit skriver andet).
- Andre varianter. Amortiseret, randomiseret, determinitisk, non-deterministisk, etc.

Pladsforbrug

- Pladsforbrug. Antallet af lagerpladser som algoritmen bruger.
- Lager.
  - Variable og pointere/referencer = 1 lagerplads.
  - Tabel af længde k = k lagerpladser.
- Terminologi. Pladsforbrug, plads, pladskompleksitet, lagerplads, lager.

Analyse af algoritmer

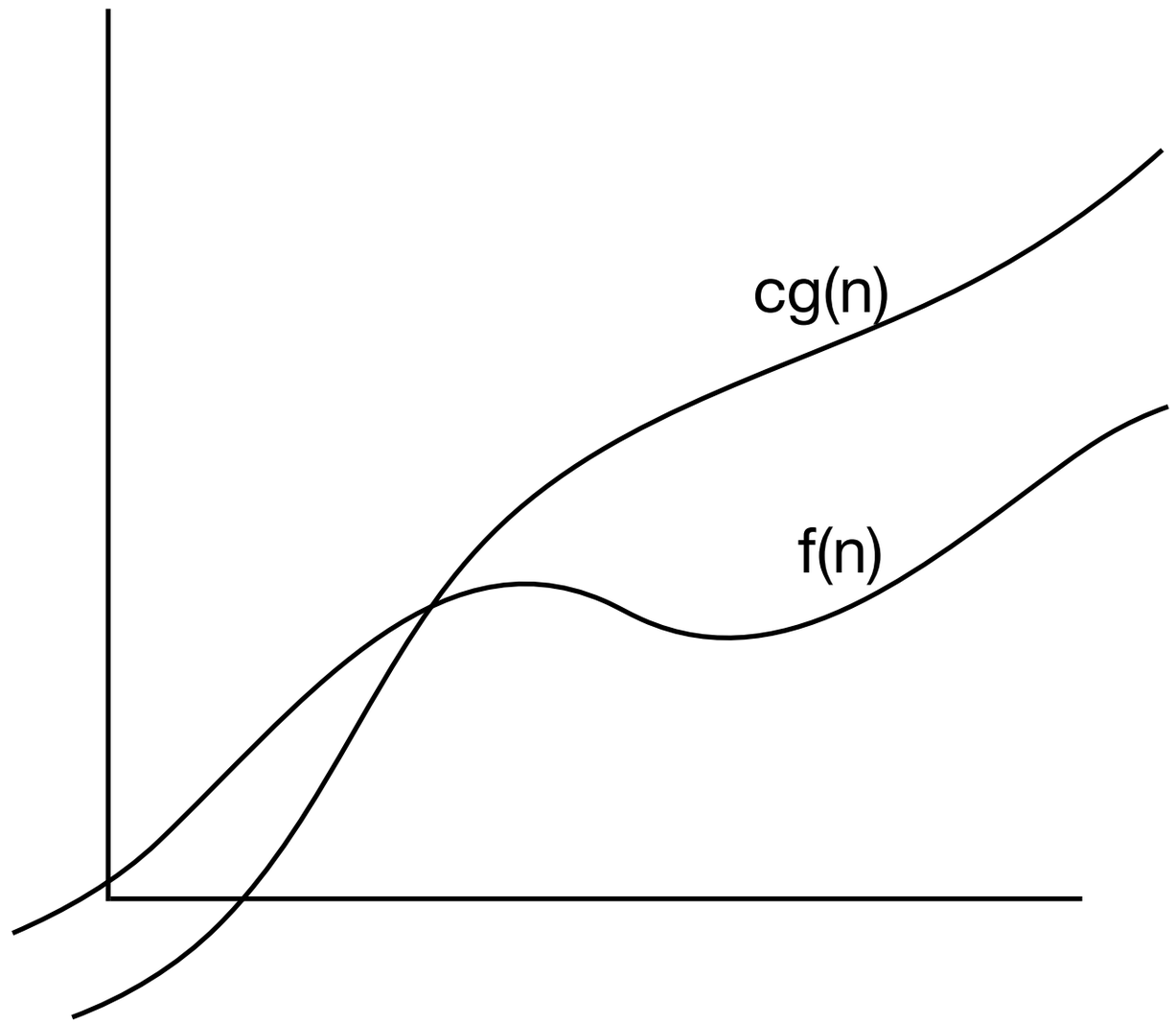
- Analyse af algoritmer
  - Køretid
  - Pladsforbrug
- Asymptotisk notation
  - O, Θ og Ω-notation.
- Eksperimentiel analyse af algoritmer

Asymptotisk notation

- Asymptotisk notation.
  - O, Θ og Ω-notation.
  - Notation til at give grænser for funktioners asymptotiske vækst.
  - Velegnet til analyse af algoritmer.

O-notation

- Def. f(n) = O(g(n)) hvis f(n) ≤ cg(n) for store n.



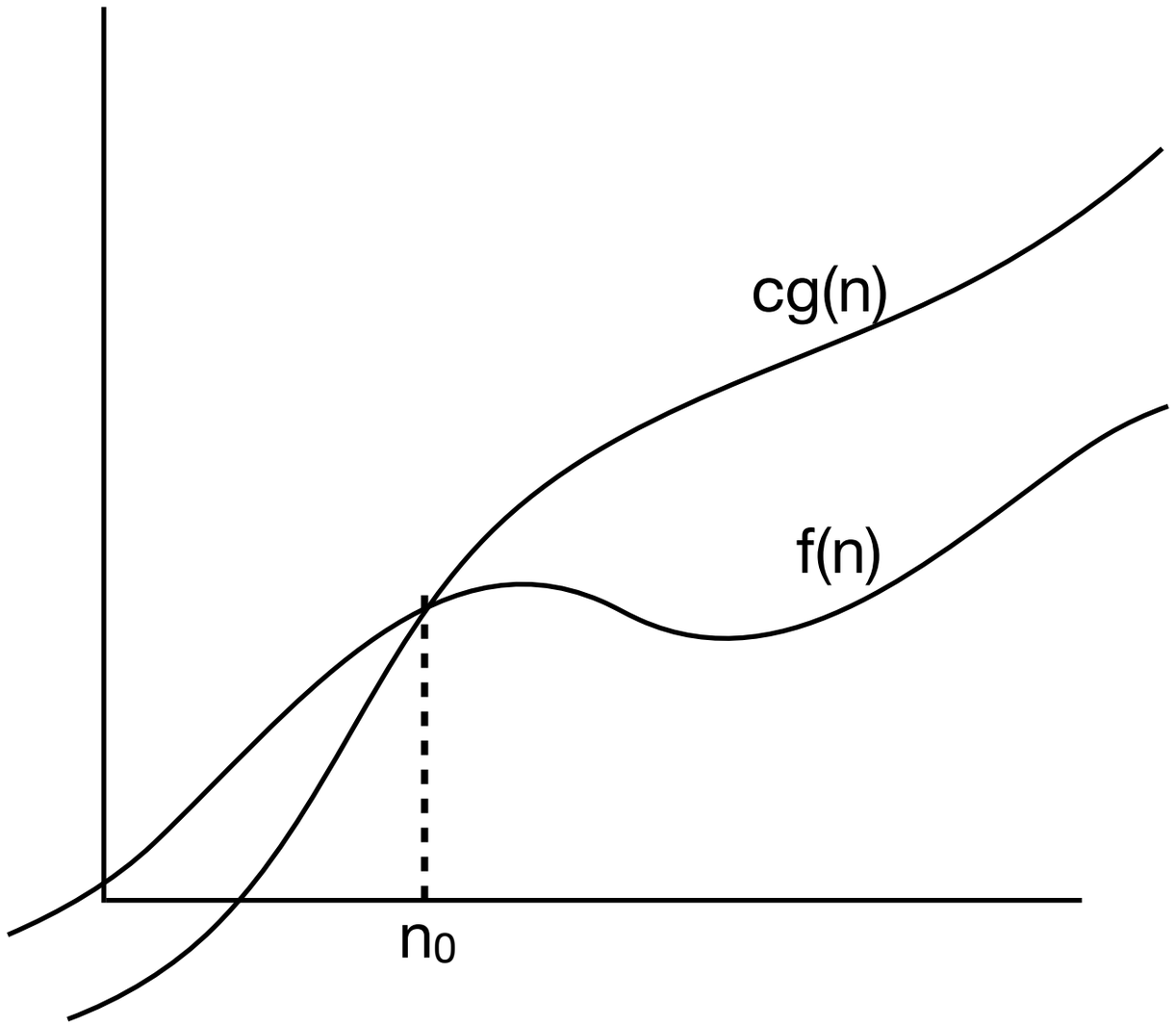
O-notation

- Eks. $f(n) = O(n^2)$ hvis $f(n) \leq cn^2$ for store n.

- $5n^2 = O(n^2)$?
  - $5n^2 \leq 5n^2$ for store n.
- $5n^2 + 3 = O(n^2)$?
  - $5n^2 + 3 \leq 6n^2$ for store n.
- $5n^2 + 3n = O(n^2)$?
  - $5n^2 + 3n \leq 6n^2$ for store n.
- $5n^2 + 3n^2 = O(n^2)$?
  - $5n^2 + 3n^2 = 8n^2 \leq 8n^2$ for store n.
- $5n^3 = O(n^2)$?
  - $5n^3 \geq cn^2$ for alle konstanter c for store n.

O-notation

- Def. f(n) = O(g(n)) hvis f(n) ≤ cg(n) for store n.
- Def. f(n) = O(g(n)) hvis hvis der findes konstanter c, $n_0 > 0$, således at for alle $n \geq n_0$ gælder at f(n) ≤ cg(n)



O-notation

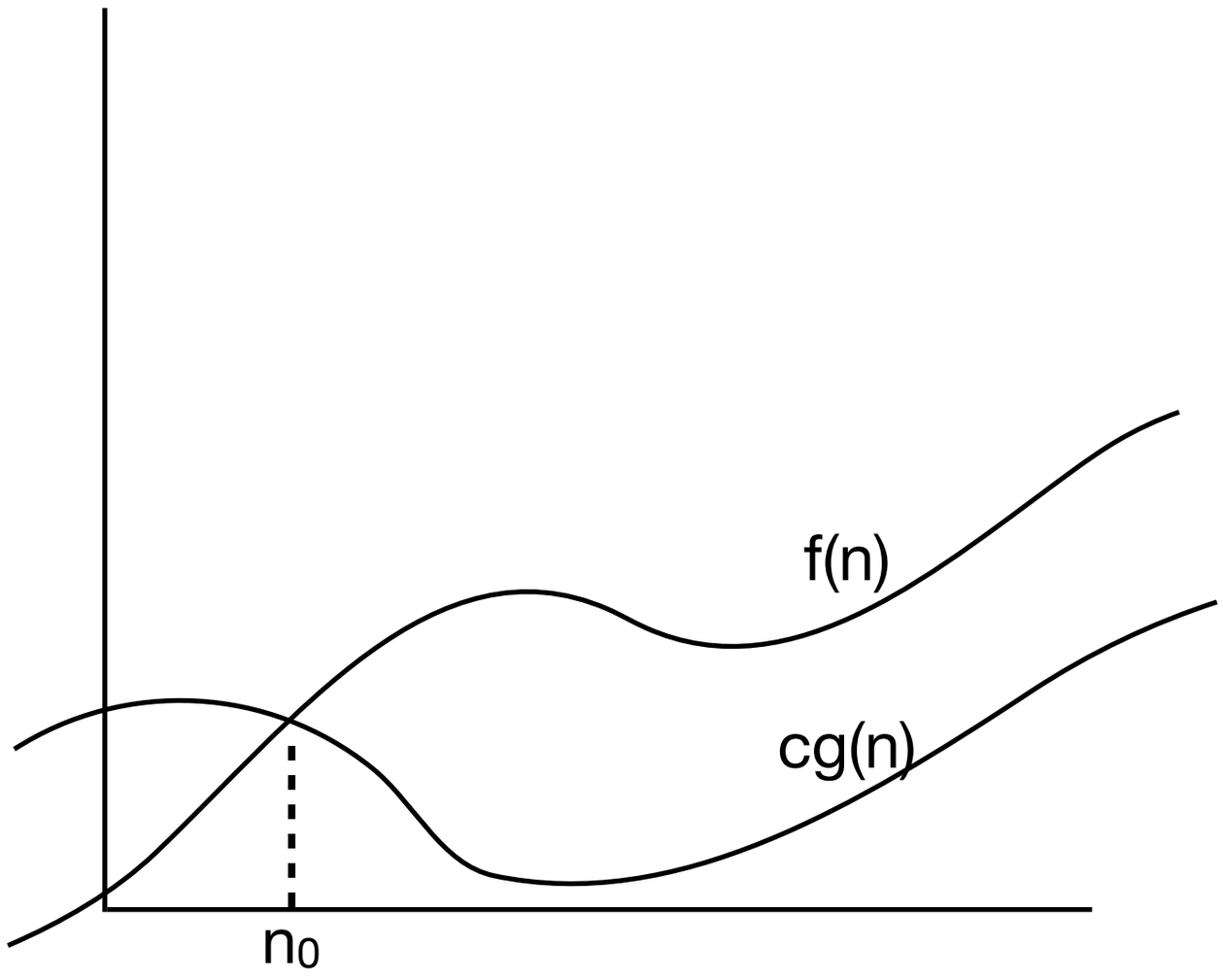
- Notation.
  - O(g(n)) er en mængde af funktioner.
  - Tænk på = som $\in$ eller $\subseteq$.
  - Man kan skrive f(n) = O(n^2) men *ikke* O(n^2) = f(n).

O-notation

- $f(n) = O(g(n))$ hvis $f(n) \leq cg(n)$ for store n.
- Opgave.
  - Lad $f(n) = 3n + 2n^3 - n^2$ og $h(n) = 4n^2 + \log n$ (Basen på logaritmer er altid 2 medmindre andet er angivet).
  - Hvilke af følgende udsagn er korrekte?
  - $f(n) = O(n)$
  - $f(n) = O(n^3)$
  - $f(n) = O(n^4)$
  - $h(n) = O(n^2 \log n)$
  - $h(n) = O(n^2)$
  - $h(n) = O(f(n))$
  - $f(n) = O(h(n))$

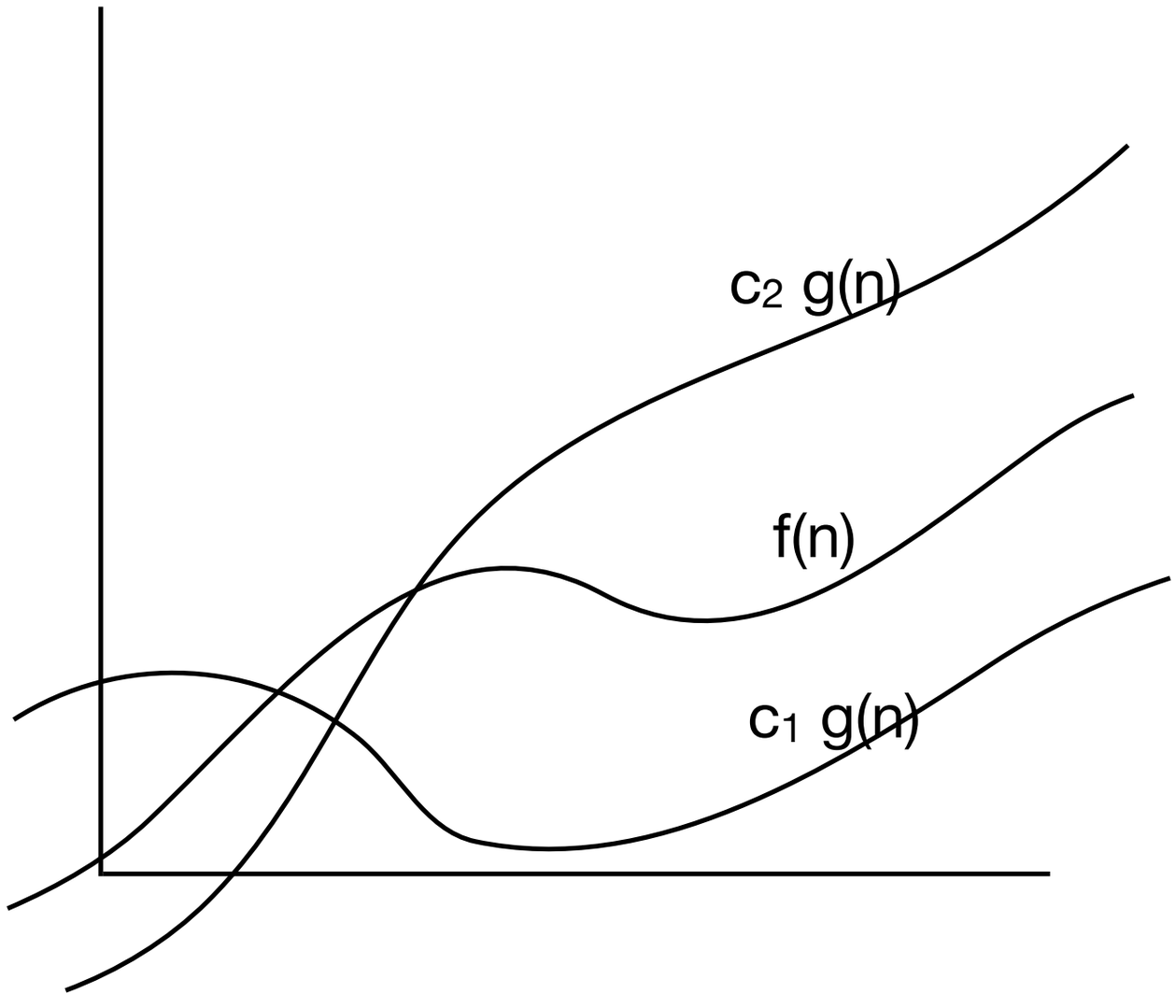
Ω-notation

- Def. f(n) = Ω(g(n)) hvis der findes konstanter c, $n_0 > 0$, således at for alle $n \geq n_0$ gælder at $f(n) \geq cg(n)$



Θ-notation

- Def. f(n) = Θ(g(n)) hvis f(n) er både O(g(n)) og Ω(g(n))



Asymptotisk notation

- $f(n) = O(g(n))$ hvis $f(n) \leq cg(n)$ for store n.
- $f(n) = \Omega(g(n))$ hvis $f(n) \geq cg(n)$ for store n.
- $f(n) = \Theta(g(n))$ hvis f(n) er både $O(g(n))$ og $\Omega(g(n))$

- Opgave. Hvilke af følgende udsagn er korrekte? ($\log^k n$ betegner $(\log n)^k$)
  - $n \log^3 n = O(n^2)$
  - $2^n + 5n^7 = \Omega(n^3)$
  - $n^2(n - 5)/5 = \Theta(n^2)$
  - $4\ n^{1/100} = \Omega(n)$
  - $n^3/300 + 15 \log n = \Theta(n^3)$
  - $2^{\log n} = O(n)$
  - $\log^2 n + n + 7 = \Omega(\log n)$

Asymptotisk notation

- Nyttige egenskaber.
  - Ethvert polynomie vokser proportionalt med det største led.

$$a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_d n^d = \Theta(n^d)$$

  - Alle logaritmer er asymptotisk ens.

$$\log_a(n) = \frac{\log_b n}{\log_b a} = \Theta(\log_c(n)) \qquad \text{for alle konstanter } a, b > 0$$

  - Enhver logaritme vokser langsommere end ethvert polynomie

$$\log(n) = O(n^d) \qquad \text{for alle } d > 0$$

  - Ethvert polynomie vokser langsommere end enhver eksponentialfunktion

$$n^d = O(r^n) \qquad \text{for alle } d > 0 \text{ og } r > 1$$

Typiske køretider

```
for i = 1 to n
  < 0(1) tids operation >
```

```
for i = 1 to n
  for j = 1 to n
    < 0(1) tids operation >
```

```
for i = 1 to n
  for j = i to n
    < 0(1) tids operation >
```

Typiske køretider

$$T(n) = \begin{cases} T(n/2) + \Theta(1) & \text{hvis } n > 1 \\ \Theta(1) & \text{hvis } n = 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + \Theta(n) & \text{hvis } n > 1 \\ \Theta(1) & \text{hvis } n = 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} T(n/2) + \Theta(n) & \text{hvis } n > 1 \\ \Theta(1) & \text{hvis } n = 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + \Theta(1) & \text{hvis } n > 1 \\ \Theta(1) & \text{hvis } n = 1 \end{cases}$$

Analyse af algoritmer

- Analyse af algoritmer
  - Køretid
  - Pladsforbrug
- Asymptotisk notation
  - O, Θ og Ω-notation.
- Eksperimentiel analyse af algoritmer

Eksperimentiel analyse

- Udfordring. Kan man eksperimentielt bestemme (et godt bud på) køretiden?
- Fordoblingsteknik.
  - Kør programmet for forskellige størrelser og mål køretiden (manuelt eller automatisk).
  - Kig på hvilken faktor køretiden vokser med når man fordobler størrelsen af input.
- Eks.
- Input vokser med faktor 2 $\Longrightarrow$ Tid vokser med en faktor ~4.
- $\Longrightarrow$ Algoritmen har kvadratisk køretid:
  - $T(n) = cn^2$
  - $T(2n) = c(2n)^2 = c2^2n^2 = c4n^2$
  - $T(2n)/T(n) = 4$

n	Tid i min	Ratio
5000	0	-
10000	0.2	-
20000	0.6	3
40000	2.3	3.8
80000	9.4	4
160000	37.8	4

Analyse af algoritmer

- Analyse af algoritmer
  - Køretid
  - Pladsforbrug
- Asymptotisk notation
  - O, Θ og Ω-notation.
- Eksperimentiel analyse af algoritmer