Danmarks Tekniske Universitet

Skriftlig prøve, den 29. maj 2013.

Kursusnavn: Algoritmer og datastrukturer Kursus nr. 02326.

Hjælpemidler: Skriftlige hjælpemidler. Det er **ikke** tilladt at medbringe lommeregner.

Varighed: 4 timer

Vægtning af opgaverne: Opgave 1 - 20%, Opgave 2 - 20%, Opgave 3 - 20%, Opgave 4 - 15%, Opgave 5 - 25%.

Vægtningen er kun en cirka vægtning.

Alle opgaver besvares ved at udfylde de indrettede felter nedenfor. Som opgavebesvarelse afleveres blot denne og de efterfølgende sider i udfyldt stand. Hvis der opstår pladsmangel kan man eventuelt benytte ekstra papir som så vedlægges opgavebesvarelsen.

Opgave 1 (kompleksitet)

1.1 Angiv for hver af nedenstående udsagn om de er korrekte:

	Ja	*Nej*
$n(n+1)/100 = O(n^3)$	☐	☐
$n(n+1)/2 + \log n = O(n^2)$	☐	☐
$\frac{n}{\log n} = O(n)$	☐	☐
$\sqrt{n} = O(\log n)$	☐	☐
$n + n(n-1)/5 = O(n)$	☐	☐

1.2 Skriv følgende liste af funktioner op i voksende rækkefølge efter asymptotisk vækst. Dvs. hvis funktionen $g(n)$ følger umiddelbart efter funktionen $f(n)$ i din liste, så skal der gælde at $f(n) = O(g(n))$.

$\frac{n^3}{10000}$

$\frac{n^3}{\log n} + 100n + 5000n^2$

$2^n \log n$

$2^4 \cdot n^{1/4}$

$2n^2 + \sqrt{n}$

Svar: ____

1.3 Betragt nedenstående algoritme, der som input tager et array med n heltal.

Algorithm 1 Løkke1(A[$1 \ldots n$])

```
for i = 1 to n − 1 do
    for j = i + 1 to n do
        if A[i]=A[j] return false
    end for
end for
Return true
```

Forklar hvad algoritmen beregner/gør:

Køretiden af algoritmen er (sæt kun ét kryds): Dit svar skal være så tæt som muligt

A $\Theta(\log n)$ B $\Theta(n)$ C $\Theta(n \log n)$ D $\Theta(n^2 \log n)$ E $\Theta(n^{1.5})$

F $\Theta(n^2)$ G $\Theta(2^n)$ H $\Theta(n^4)$ I $\Theta(\sqrt{n})$

1.4 Antag at du har en algoritme hvis køretid er præcist $7n^3$. Hvor meget langsommere kører algoritmen hvis du fordobler inputstørrelsen?

A dobbelt så langsom
B 3 gange langsommere
C 7 gange langsommere
D 8 gange langsommere
E 14 gange langsommere
F 4 gange langsommere

1.5 Betragt nedenstående algoritme.

Algorithm 2 Løkke2(n)

```
if n > 0 then
   for i = 1 to n do
      print "⋆"
   end for
   Løkke2(n − 1)
end if
```

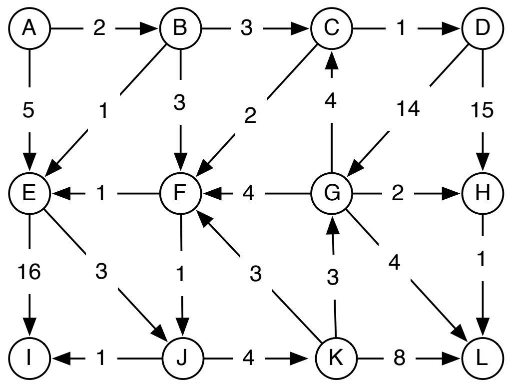
a) Hvor mange stjerner udskriver algoritmen Løkke2 når den bliver kaldt med parameteren $n = 4$: ______________

b) Køretiden af algoritmen er (sæt kun ét kryds): Dit svar skal være så tæt som muligt

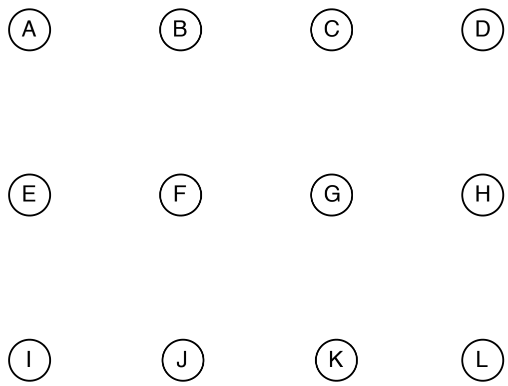
A $\Theta(\log n)$
B $\Theta(n)$
C $\Theta(n \log n)$
D $\Theta(n^2 \log n)$
E $\Theta(n^3)$
F $\Theta(n^2)$
G $\Theta(2^n)$
H $\Theta(n^4)$
I $\Theta(\sqrt{n})$

Opgave 2 (grafer)

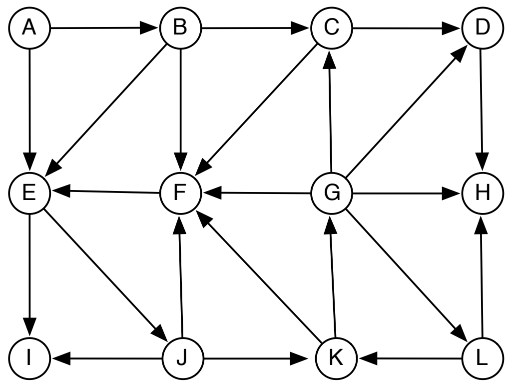
2.1 Angiv et korteste veje træ for nedenstående graf når korteste veje beregningen sker fra startknuden A. Angiv for hver knude afstanden fra knuden A.



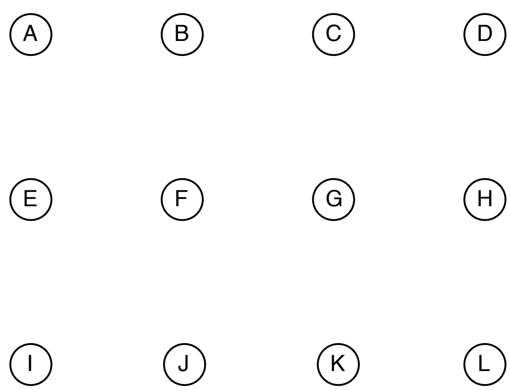
Angiv korteste veje træet og afstandene her:



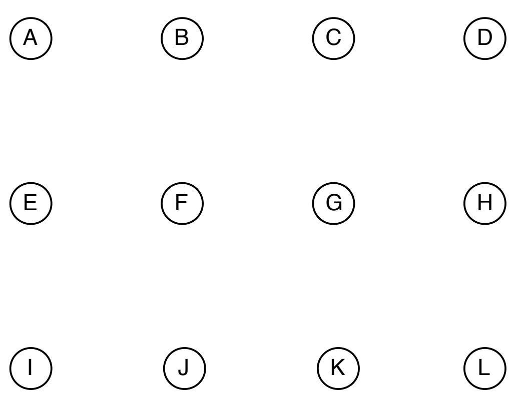
2.2 Betragt nedenstående graf G.



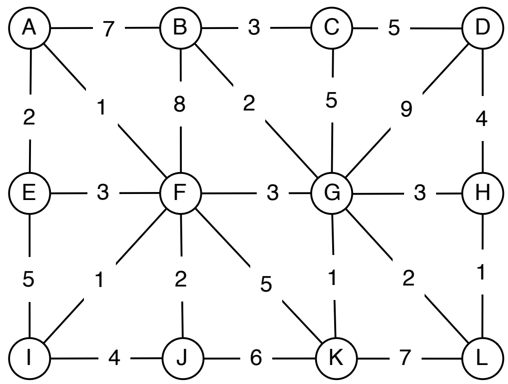
a) Angiv et BFS træ for grafen G når BFS gennemløbet starter i knuden A. Angiv BFS-dybde/lag for hver knude. Det antages at incidenslisterne er sorteret i alfabetisk orden.



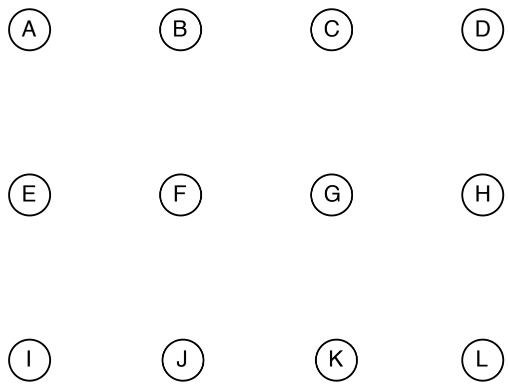
b) Angiv et DFS træ for grafen G, når DFS gennemløbet starter i knuden A. Angiv *discovery time* og *finishing time* for hver knude. Det antages at incidenslisterne er sorteret i alfabetisk orden.



2.3 Angiv et mindste udspændende træ i nedenstående graf.

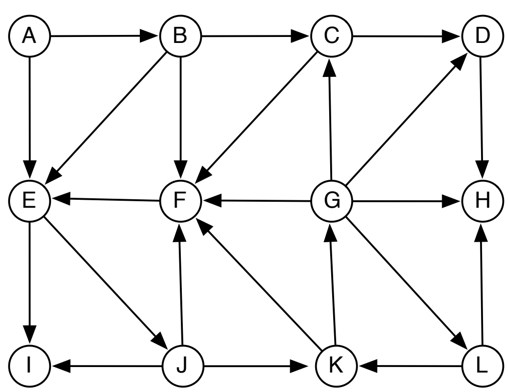


Angiv det mindste udspændende træ og værdien af det her:



Værdi: ______________

2.4 Er nedenstående graf en DAG (*directed acyclic graph*)? Hvis ja, så angiv en topologisk sortering af knuderne. Hvis nej, så forklar hvorfor.



Opgave 3 (modellering og anvendelse af algoritmer/datastrukturer)

Rejseselskabet ØerЯos planlægger rejser til øgruppen Algo. Nogle af øerne er forbundet med broer, andre må man sejle imellem. Der er X øer, B broer, og F færger. Hver færge sejler frem og tilbage mellem to øer.

Opgave 3.1: Rejser for søsyge

Da nogle af rejseselskabets kunder nemt bliver søsyge, ønsker firmaet at finde det største antal øer man kan besøge uden at skulle sejle imellem dem. På den måde kan de rejsende nøjes med at sejle til den første ø i gruppen og derefter komme til de andre øer via broerne.

Giv en effektiv algoritme der finder det største antal øer man kan besøge uden at sejle imellem dem.

Angiv køretiden af din algoritme i asymptotisk notation (ved hjælp af parametrene X, B og F) og argumenter for at den virker.

Opgave 3.2: Billigste færgeture

Andre af rejseselskabets kunder ønsker at besøge en gruppe af Y øer, hvor der ikke er nogle broer imellem. Det er muligt at besøge alle øerne ved at tage færger imellem dem. Firmaet kender prisen for alle færgeture. Alle billetterne til færgerne er returbilletter. Dvs. man betaler for både at sejle frem og tilbage når man køber en færgebillet. Der er G færgeruter. Firmaet vil gerne tilbyde den billigste rejse, så de vil gerne minimere den pris man betaler for færgebilletter.

Giv en algoritme der finder ud af hvilke færgebilletter der skal købes for at alle Y øer kan besøges, og så den samlede pris for færgebilletter bliver mindst mulig. Angiv køretiden af din algoritme i asymptotisk notation (ved hjælp af parametrene Y og G) og argumenter for at den virker.

Opgave 3.3: Billigste tur til alle øer

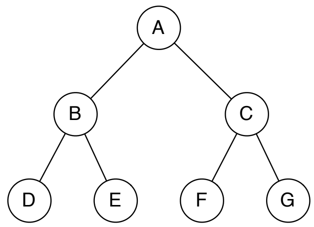
Som i forrige opgave ønsker firmaet at minimere den pris man betaler for færgebilletter. Men nu er der broer mellem nogle af øerne. Da broerne er gratis er der ingen grund til at tage en færge mellem to øer hvis der er en bro. Der er X øer, B broer, og F færger.

Giv en algoritme der finder ud af hvilke færgebilletter der skal købes for at alle X øer kan besøges, og så den samlede pris for færgebilletter bliver mindst mulig. Angiv køretiden af din algoritme i asymptotisk notation (ved hjælp af parametrene X, B og F) og argumenter for at den virker.

Opgave 4 (Træer)

4.1 Trægennemløb

Betragt nedenstående træ.



Angiv hvilke af følgende sekvenser af bogstaver der bliver udskrevet ved et preorder, inorder og postorder gennemløb af ovenstående træ.

$\boxed{1}$ A B C D E F G $\boxed{2}$ G F E D C B A $\boxed{3}$ A B D E C F G

$\boxed{4}$ D B E A F C G $\boxed{5}$ D E B F G C A $\boxed{6}$ C B D A F E G

Preorder: _________

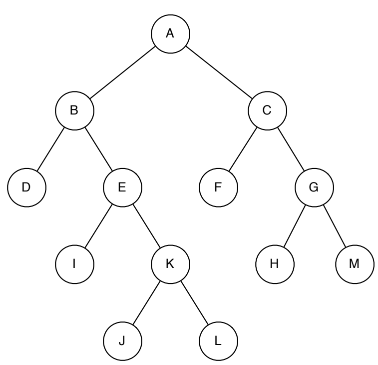
Inorder: _________

Postorder: _________

4.2 Korteste sti

Denne opgave omhandler rodfæstede binære træer. Hver knude har *enten to eller ingen* børn. Knuden x's venstre barn betegnes *left*[x], og dens højre barn betegnes *right*[x]. Hvis knuden x ikke har nogle børn, har *left*[x] og *right*[x] den specielle NIL værdi. Hvis knude x ikke har nogle børn, kaldes den et blad. Ellers kaldes den en intern knude. Såfremt rodknuden for et træ er NIL, er træet tomt.

4.2.1 Betragt nedenstående træ.



Hvad er længden af den korteste rod-til-blad sti i træet: _________

Hvad er længden af den længste rod-til-blad sti i træet: _________

4.2.2 Betragt følgende algoritme:

Algorithm 3 TRÆ(x)

```
if (x = NIL or left[x] = NIL) then
    return 0
else
    return TRÆ(left[x]) + 1
end if
```

Forklar hvad algorimen TRÆ(x) beregner når den bliver kørt med rodknuden til et vægtet binært træ T som input?

Lav algoritmen om så den i stedet returnerer længden af den korteste rod-til-blad sti i træet. Angiv køretiden af din algoritme i asymptotisk notation og argumenter for at den virker.

Opgave 5 (datastrukturer)

5.1 Betragt nedenstående kø K implementeret ved hjælp af en tabel (et array). K.head = 3 og K.tail = 8.

1	2	3	4	5	6	7	8
		C	O	M	B	I	

Angiv hvordan køen ser ud efter følgende operationer: Enqueue(D), Enqueue(T), Dequeue(), Enqueue(U).

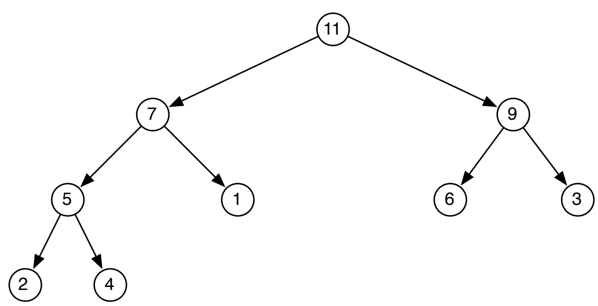
1	2	3	4	5	6	7	8

5.2 Lad H være en hægtet hashtabel (chained hashing) af størrelse 5 med hashfunktion $h(x) = x \mod 5$. Angiv hvordan hashtabellen H ser ud efter indsættelse af tallene 6, 7, 3, 14, 2

5.3 Lad H være en hashtabel med linær probering (linear probing) af størrelse 5 med hashfunktion $h(x) = x \mod 5$. Angiv hvordan hashtabellen H ser ud efter indsættelse af tallene 6, 7, 3, 14, 2

5.5 Denne opgave omhandler binære max-hobe.

Opgave a Angiv hvordan den binære hob nedenfor ser ud efter indsættelse af et element med nøgle 8.



Opgave b Angiv hvordan den binære hob nedenfor ser ud efter én Extract-Max operation.