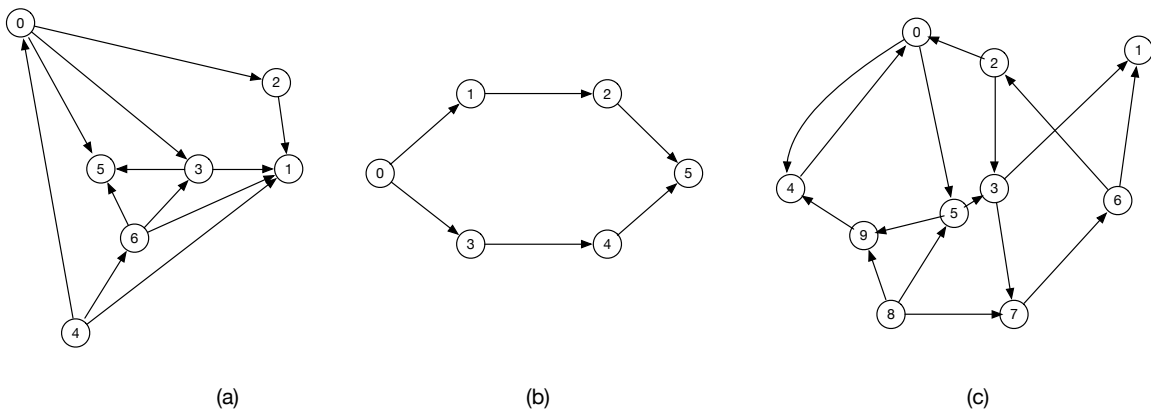


# Ugeseddel: Orienterede grafer

Philip Bille

## Om denne uge

**Litteratur** *Introduction to Algorithms*, Cormen, Rivest, Leisersons og Stein (CLRS): Introduktion til del VI + kap. 22.1-22.4 + appendix B.4-B.5.



Figur 1: Grafer til opgaverne.

## Opgaver

**1 Repræsentation, egenskaber og algoritmer** Kig på graferne i figur 1. Løs følgende opgaver.

1.1 [o] Vis incidenslister og incidensmatricer for (a) og (b).

1.2 [o] Håndkør DFS eller BFS fra knude 4 i (a) og knude 5 i (c).

1.3 Hvilke af (a) og (c) er DAGs? Hvis grafen er en DAG, så find en topologisk sortering med den rekursive algoritme til topologisk sortering. Hvis grafen ikke er en DAG så angiv en kreds.

1.4 Angiv stærke sammenhængskomponenter i (a) og (c).

1.5 Hvor mange topologiske sorteringer har (b)?

1.6 Hvor mange stærke sammenhængskomponenter er der i en DAG?

**2 Slanger og stiger** Slanger og stiger (*snakes and ladders*) er et klassisk brætspil. Vi kigger på følgende variant. Spillet foregår på et  $n \times n$  gitter, med felter nummeret fortløbende fra 1 til  $n^2$ . Se figur. Særlige par af felter er *slanger*, der fører nedad og *stiger* der fører op. Hvert felt kan være endepunkt for højst en stige eller slange.

21	22	23	24	25
20	19	18	17	16
11	12	13	14	15
10	9	8	7	6
1	2	3	4	5

Målet med spillet er at komme fra det første felt til det sidste med færrest mulige skridt. Man starter med at placere sin brik i felt 1. I hvert skridt kan man flytte sin brik *højest* 5 felter frem. Hvis en brik ender i toppen af en slange flytter den til bunden af slangen og tilsvarende hvis en brik ender i bunden af en stige flytter den til toppen af stigen. Giv en algoritme til at beregne det mindste antal skridt det kræver for at flytte en brik fra det første felt til det sidste felt.

### 3 DAGs og topologisk sortering

- 3.1 Professor Gørtz forslår følgende nye og simple algoritme til at konstruere en topologisk sortering: kørs BFS fra en knude  $s$  med indgrad 0 og sorter knuderne efter stigende afstand fra  $s$ . Virker algoritmen?
- 3.2 Giv en algoritme, der givet en graf  $G$  og en sortering  $S$  af knuder i  $G$  afgør om  $S$  er en topologisk sortering.
- 3.3 Givet en DAG  $G$ , findes der en topologisk sortering af  $G$ , der *ikke* kan fremkomme vha. af den rekursive algoritme til topologisk sortering?
- 3.4 [\*] En *Hamilton-sti* er en sti der besøger alle knuder netop en gang. Giv en algoritme til at afgøre om en DAG har en Hamilton-sti.

### 4 DFS og BFS implementation Lad $G$ være en graf givet i incidenslisterepræsentationen.

- 4.1 [†] Implementer DFS. Givet  $G$  og en startknude  $s$  skal din algoritme udskrive nummeret på en knude når den besøges første gang og sidste gang (*discovery time* og *finishing time*). Når der er flere mulige naboer at vælge mellem, så tag den med mindste nummer.
- 4.2 [D†] Implementer BFS. Givet en startknude  $s$  og en slutknude  $t$  skal du bestemme *længden* af den korteste sti mellem dem. Når der er flere mulige naboer at vælge mellem, så tag den med mindste nummer.

5 [\*] **Etnografer**<sup>1</sup> Du skal hjælpe nogle etnografer med at analysere noget mundtligt historiedata, de har samlet ved at interviewe medlemmer af en landsby, for at lære om livet i området gennem de sidste 200 år. Du har gennem interviewene fået kendskab til en mængde afdøde personer,  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Etnograferne har samlet forskellige fakta om disse personers liv. Specifikt, for et hvert par af personer  $(P_i, P_j)$  ved etnograferne en af følgende fakta:

- (a)  $P_i$  døde før  $P_j$  blev født.
- (b)  $P_i$  og  $P_j$  var begge i live på samme tidspunkt.

Naturligvis, er etnograferne ikke sikre på at deres fakta er korrekte; hukommelse kan fejle og all information er blevet mundtligt overbragt. Derfor vil de gerne afgøre om det data de har samlet er konsistent, i den forstand at der kunne have eksisteret personer således at alle faktaerne om dem holder.

Giv en algoritme til at løse etnografernes problem. Din algoritme skal enten give en konsistent sekvens af fødsler og dødsfald eller rapportere at der ikke findes nogen.

6 **Tre Dunke** Du er givet tre dunke med plads til henholdsvis 8, 5 og 3 liter. Dunken på 8 liter er fyldt med vand og de to andre er tomme. Dit mål er at få præcis 4 liter i en af dunkene ved at fylde en dunk helt op eller ved at tømme en dunk over i en anden. Løs følgende opgaver.

- 6.1 [\*] Vis at det kan lade sig gøre og giv den korteste sekvens af tømninger og fyldninger du kan finde.
- 6.2 [\*] Antag nu at du har  $n$  dunke med plads til  $d_1, \dots, d_n$  liter hver og et mål på  $x$  liter du skal have i en dunk. Giv en algoritme til at beregne den korteste sekvens af tømning og fyldninger. *Hint*: modeller problemet som en implicit graf.

### Frivillig afleveringopgave: Brydning CLRS 22.2-7

---

<sup>1</sup>Oversat fra *Algorithm Design*, Jon Kleinberg og Eva Tardos